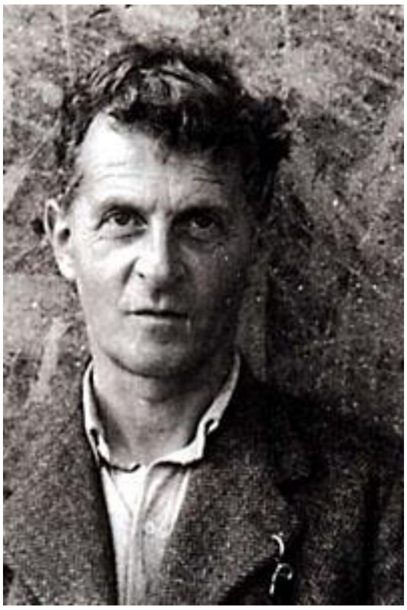
Ett försök till sammanfattning av boken

”Wittgensteins Lectures on the Foundations of Mathematics

Cambridge 1939

Ed. Cora Diamond

Viss vägledning har jag fått av Ray Monks biografi ”Ludwig Wittgenstein, The Duty of a Genius” där Monk bland annat tar upp Wittgensteins arbete med matematiken.



Ludwig Wittgenstein

Inledning

Ludwig Wittgenstein är mest känd för:

1. Boken ”Tractatus Logico Philosophicus”.
2. Hans strävan i boken ”Filosofiska Undersökningar” att upplösa filosofins frågeställningar som han ansåg beror på missförstånd. Frågorna och svaren betraktar han därmed som nonsens.
3. Hans arbete i slutet av sitt liv om filosofisk psykologi där han avvisar föreställningar om ett inre medvetande oåtkomligt för alla utom för en själv.
4. Hans angrepp på all dogmatisk religion som har haft stor betydelse för inte minst katolsk teologi.

Dessa fyra punkter kan möjligen sammanfattas som ett angrepp på all slags metafysik vare sig inom filosofi, psykologi, matematik, fysik eller religion.

Trots detta är det nog hans arbete rörande matematiken som han själv ansåg vara det mest centrala, trots att det förblev ofullbordat. Visserligen finns en klar koppling mellan hans matematiska filosofi och övriga filosofiska områden, men det var inom den matematiska filosofin som hans filosofi var mest revolutionerande. Han hävdade bestämt att matematik inte är en vetenskap. Inte minst Bertrand

Russell och Gottlob Frege hade ju sökt en grund för matematiken. Wittgenstein hävdade att en sådan grund inte finns och inte heller behövs. Så vitt jag förstår menar han att det matematiska språket lika litet som vardagsspråket behöver ett fundament att stå på. Inte heller logiken kan tjäna som grund för matematiken, något som Russel och Frege sökt visa, men aldrig lyckades med. Inte minst Russel hade hoppats på att Wittgenstein skulle lyckas.

Om algebra säger Wittgenstein: ”The fact that in algebra we use letters to calculate, rather than actual numbers, does not make algebra the theory of arithmetik, it is simply another calculus.”

Här skulle jag kanske våga mig på en förenklad sammanfattning av en del Wittgensteins matematiska filosofi som möjligen kan göra fortsättningen mer begriplig.

Wittgenstein nämner ofta mycket enkla matematiska exempel trots att han hade goda kunskaper i matematik, fysik och teknik. Ofta använder han:

2 + 2 = 4. Vad är det som står där? Vi får inte låta oss förvillas av de arabiska skrivtecknen. Jo:

I I + I I = I I I I

Det vill säga om man enbart använder fornegyptiska skrivtecken eller vilka tecken som helst:

I I I I = I I I I

Fyra är lika med fyra.

Är detta matematik? Ja, men samtidigt en tautologi och en tautologi ger oss ingen ny information. Det är en självklarhet eftersom det står samma sak på båda sidorna av tecknet för ”är lika med”.

Matematik och algebra visar enbart tautologier (tautologi av grekiska ”samma ord” eller ”samma ordning”). Matematiken upptäcker alltså inget utan uppfinner bara nya tautologier. En motsägelse i matematiken leder inte fel utan leder ingen vart. 2 + 2 = 5 är nonsens vilket I I I I = I I I I I visar även för den totalt okunnige i matematik.

Matematik skulle alltså syssla med en sådan självklarhet som att visa att det sagda är lika med det sagda.

Nu skall ingen tro att man med detta exempel förstått Wittgensteins matematiska filosofi. Han har verkligen inte ägnat 31 föreläsningar och oändliga anteckningar åt matematiken om det vore så enkelt, men exemplet kan tjäna som en fingervisning.

Under föreläsningarna i Cambridge hade Wittgenstein inget manus. Han satt på en stol och talade fritt medan studenterna antecknade så pennorna glödde. Dessutom deltog G E Moore och Alan Turing i många av seminarierna. Utifrån fyra studenters anteckningar har Cora Diamond sammanställt föreläsningarna i bokform.

Alan Turing

Wittgenstein menar att sökandet efter ett matematikens fundament är metafysisk spekulation. Däremot hade Wittgenstein sedan ungdomen stor respekt för fysik och teknik. Inom dessa områden är matematiken mycket användbar, men har ingen speciell egen grund. Dess betydelse beror av hur den appliceras. För alla språk vare sig det är vardagsspråket, religioners språk, etik eller estetik, psykologi eller matematik gäller Goethes fras från Faust: ”Am Anfang war dit Tat”.

Aktivitet, handling, är språkens grund och ursprung och det behövs inga teorier som förklarar betydelsen för det finns inget att förklara. Språk förstås i det sammanhang de hör hemma i och av alla som delar samma sammanhang, det vill säga samma livsform, grammatik och språkspel. Alla sorters språk hämtar dock sina ord från vardagsspråket så det finns en analogi mellan vardagsspråkets användning av ord och betydelsen i det sammanhang ord appliceras i, men inte heller i det nya sammanhanget kan orden definieras utan får sin betydelse i det nya användandet. Bara för att ett ord är ett substantiv betecknar det inte ett bestämt objekt utan är alltid kopplat till en aktivitet. Försök till definitioner leder enbart till att definitionen måste definieras ytterligare och så vidare i alla oändlighet.

Föreläsning I

Wittgenstein inleder den första föreläsningen med att han skall tala om ”the foundations of mathematics”, inte undervisa i matematik. Som filosof kan han tala om matematik eftersom han enbart kommer att behandla den förvirring som uppkommer av alla ord från vardagsspråket som används i matematiken. Till exempel ”bevis, tal, serier, ordning…”. Det han alltså kommer att ta upp i föreläsningarna är inte matematiska problem utan just matematikens fundament och särskilt frågan om fundamentet. Redan att söka ett fundament är förvirrande och beror på ett missförstånd av vad matematik är. Han menar att det leder till förvirring när ord från vardagsspråket används i matematiken, ord som alltså appliceras i helt nya sammanhang vilket förutsätter en koppling, analogi, mellan sammanhangen.

”You only understand an expression when you know how to use it, although it may conjure up a picture, or perhaps you draw it.”

Ett uttryck kan användas i alla möjliga sammanhang, ha ett otal olika applikationer. Uttryck kan appliceras på otaliga bilder. Uttrycken kan dock trots det ”förstås” rätt av de som känner den livsform i vilka uttrycken yttras, det vill säga är delaktig i samma språkspel, i samma ”stream of life”.

Föreläsningarna skall alltså vara en slags utredning som leder till så självklara insikter att de blir oemotsägbara. Wittgenstein slutar föreläsning I med orden : ”I shall try again and again to show that what is called a mathematical discovery had much better be called a mathematical invention”.

Föreläsning II

Wittgenstein påstår att det råder en viss förvirring om vad vi menar när vi påstår oss förstå en fras eller en symbol. Vi kan påstå oss förstå olika ord, men användningen av dem visar om vi verkligen förstått dem, att vi applicerar dem korrekt i de allra flesta fall.

Vad menas med att man förstår en symbol? Kanske att man förstått en idé? Detta förutsätter att det finns ett kriterium för att se att vi har samma idé. Detta måste vara att vi använder symbolen på samma sätt. Till exempel ordet två.

Wittgenstein menar vidare att orden ”avse, förstå och mena” hänger ihop. Dessa tre ords ”grammatik” (i Wittgensteins mening) är väldigt lika eftersom orden synes tillämpas både på vad som händer nu och vad som händer i framtiden.

Så tar Wittgenstein ett konkret exempel på vad det innebär att förstå, att förstå denna talserie:

1 4 9 16

Kanske någon säger y $= x^2$

Eller också fortsätter han serien. Kan jag därmed veta att vederbörande förstått hur man kvadrerar tal hur höga som helst? Formeln kan sägas determinera någon att göra på ett viss vis. På samma sätt som att peka determinerar någon att gå i en viss riktning. Kan det missförstås? Förutsätter formeln eller talserien vad någon gör vid till exempel det 100:e steget? Är det möjligt att någon gör på något annat sätt från och med det 100:e steget? Anta att någon gör det, systematiskt varje gång han kommer till helt 100-tal. Har han då systematiskt missförstått talserien genom en egen formel eller är missförståndet osystematiskt? När vet vi att någon har förstått vad vi menade, avsåg, förstod med talseriens början?

Wittgenstein: Vi har lärt oss räkna med arabiska skrivtecken. Hur många tal har ni lärt att skriva ned?

Alan Turing: Om jag inte vore här skulle jag säga $\aleph_0$

Wittgenstein efter en lång utläggning: $\aleph_0$ är inte ett antal. Att säga att man skrivit ned $\aleph_0$ tal är nonsens.

Vad är då kontentan av föreläsning II? Först och främst som vanligt när det gäller Wittgenstein att vi kan anses ha ”förstått” något när vi visar hur vi applicerar det, hur vi använder ordet, satsen, talet, symbolen, idén, talserien, formeln eller vad det nu är.

Användandet av ord, satser, tal, talserier, symboler och så vidare sker alltså alltid i enlighet med en viss ”grammatik”. Applicerandet måste ske inom den gällande grammatikens ramar annars blir applicerandet obegripligt för omgivningen. Om vi anknyter till föreläsning I måste matematikens regler utgå från tautologier. Samma sak måste stå på båda sidorna om är lika med tecknet. Skulle alltså matematik innebära, liksom algebran, att uppfinna nya tautologier eftersom några upptäckter inte finns att göra?

Kärnan i hela Wittgensteins filosofi (även om han anser att han inte har någon filosofi) vare sig det gäller psykologi, estetik, etik, religion eller matematik är hans kritik mot dem som förväxlar grammatiska påståenden med materiella. Man presenterar något som en upptäckt när det i själva verket är en grammatisk innovation. Observera att grammatik i Wittgensteins mening främst betyder hur något används i en viss livsform. Frågan är inte om något upptäckts eller inte, frågan är om ordens nya betydelse är användbar och i så fall i vilket syfte och i vilket ”språkspel”.

Det finns alltså en slags analogi mellan Wittgensteins arbete med psykologi och matematik. Att han i slutet av sitt liv främst ägnade sig åt psykologin innebar alltså inte att han lämnat frågan om matematikens grund. I stort sett rör problemet med psykologins och matematikens grund samma sak. Man måste följa vissa regler, den grammatik som förstås i respektive sammanhang. Att det skulle finnas något helt privat språk uteslöt Wittgenstein bestämt. Det finns inget som vi inte kan förmedla till någon annan som lever i samma livsform. Här hänvisar jag till övriga artiklar om Wittgenstein på denna hemsida och till paragraferna 189 – 242 i ”Filosofiska Undersökningar” som rör regelföljande.

Föreläsning III

Föreläsningen rör vad vi menar med bevis, till exempel matematiska bevis. Ordet bevis är naturligtvis hämtat från vardagsspråket. Applicerat på matematiska beräkningar betyder det samma sak eller något annat? Om vi säger att något är bevisat måste vi på något sätt göra klart vad vi menar med bevis. Bevis är som överdrifter, delvis sanna, delvis falska. Så är det inom till exempel astronomin, medicin och fysik. Hur är det då inom matematiken?

Att 2 + 2 = 4 är väl ett bevis? Eller att 21 gånger 36 är lika med 756 är väl också ett bevis om vi multiplicerar som vi blivit lärda? Man kan också ställa upp 21 kvadrater på ena hållet och 36 på andra och sedan räkna antalet kvadrater som Turing föreslog, då kan man vara säker. Frågan är om detta är ett matematiskt bevis eller ett fysiskt. Det vardagliga ordet bevis applicerat på matematiken kan betyda identitet av vad som står på båda sidorna av är lika med tecknet, alltså en tautologi. Kan det betyda något annat?

Wittgenstein hävdar alltså att det inte finns någon generell betydelse av ordet bevis. Ordet bevis har olika betydelser beroende på i vilket sammanhang det används. Det är alltså en ”grammatisk” fråga och Wittgenstein synes mena att ordet kan betyda olika saker även inom matematiken.

Föreläsning IV

Som jag hävdat i andra sammanhang (filosofisk fysik) uppfanns matematiken i en mänsklighetens nödsituation i forntiden, det vill säga den upptäcktes inte. Detta är uppenbart i föreläsning IV att även Wittgenstein anser att matematik uppfinns och inte upptäcks även om han inte vad jag vet sökt uppfinningen av matematiken som sådan i forntiden.

25 x 25 = 625 är på sätt och vis oberoende av erfarenhet eftersom vi aldrig kommer att kalla kalkylen falsk. Tvärtom kallar vi den bevisad eftersom resultatet (och liknande kalkyler) är användbara i vår erfarenhet och vårt ordnande av världen.

Vi slår fast regler (till exempel matematiska regler) i form av definitioner. Wittgenstein hävdar dock att det centrala är hur dessa uttryck används. Kan man till exempel lära någon att multiplicera enbart med hjälp av definitioner? Nej! Kan decimalsystemet läras ut enbart med hjälp av definitioner? Nej!

Matematik och logik är enligt Wittgenstein två skilda tekniker. Definitioner är inte bara förkortningar. De innebär en övergång från en teknik till en annan, de förbinder olika tekniker, till exempel logik och matematik.

Alla kalkyler inom matematiken har tillkommit för att tillämpas i erfarenhetsvärlden och sedan har de gjorts oberoende av erfarenheten av världen. 25 x 25 = 625 kan härledas till erfarenheter. Nu har vi emellertid gjort kalkyler oberoende av erfarenheten. Kalkylerna har blivit regler för hur vi talar om erfarenheterna.

Någon ritar en pentagon. Detta påstående är geometri, det är ett påstående utifrån vår erfarenhet av hur en pentagon ser ut. Om nu någon påstår att han ritar en heptagon?

Turing: Det är tveklöst falskt!

Wittgenstein: Är det inte konstigt att påståendet att någon ritar en pentagon skiljer sig från påståendet att någon ritar en heptagon. Hur kan vi veta att det är omöjligt att konstruera en heptagon med linjal och passare. Det är en fråga om definition. Vi vet hur vi använder linjal och passare, men hur vet vi att det inte går att konstruera en heptagon med lika sidor och vinklar vilka vi ju kan mäta. Hur vet vi att pentagonen vi ritat är riktig, jo genom att mäta den med linjal och gradskiva. Matematiskt kan vi ju inte konstruera en heptagon.

Turing: Med detta menar vi att vi inte kan ge instruktioner om hur man konstruerar en regelbunden heptagon.

Wittgenstein hävdar då att rita en heptagon utesluts på grund av erfarenhet, men att det är omöjligt är inte en erfarenhet. Föreläsning V behandlar delvis samma ämne liksom följande föreläsningar.

Föreläsning V

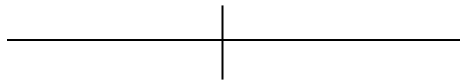
Wittgensetin menar att vi kan visa hur en regelbunden pentagon ser ut antingen genom att visa en pentagon eller beskriva den som en pentagon med alla sidor och vinklar lika. Dessutom måste man säga att vad beviset visar är att vi kan konstruera en pentagon vars vinklar och sidor är lika eftersom vi mätt dem med gradskiva och linjal. Detta leder enligt Wittgenstein till att påståendet ”vi kan konstruera en pentagon” är ett fysiskt påstående, inte ett matematiskt.

I den euklidiska geometrin sägs att sidorna skall vara lika, men kriteriet för att vara lika är oklart eftersom euklidisk geometri inte säger hur vi skall mäta. Ordet ”lika” är naturligtvis hämtat från vardagsspråket, till exempel lika hög, lika färg, lika vikt, lika antal… Kriteriet för lika skiftar alltså. När euklidisk geometri talar om ”lika” visar man helt enkelt det viktiga kriteriet för ”lika”. Kan man alltså fritt välja kriterium? Att säga att denna penna har samma längd som den här löser inget. Vad är samma? Har vi ett allmängiltigt kriterium för ”samma”? Nej!

När man i euklidisk geometri bevisar att två längder är lika innebär det inte att man säger att de är lika i vanlig mening eftersom man inte anvisar en metod för jämförelse. Man kan däremot visa en pentagon och visandet är fysik, inte matematik.

Menar då Wittgenstein att matematiska påståenden är grammatiska regler? Paradigm? Dessa kan vara användbara eller värdelösa liksom valet av mätinstrument. Om vi alltså kan visa att ett visst matematiskt påstående inte är bevisbart så kan vi sägas hävda ett geometriskt påstående. Det är som att hävda att en heptagon inte kan konstrueras, men att matematiskt bevisa det är omöjligt. Det går enbart empiriskt!

Föreläsning VI

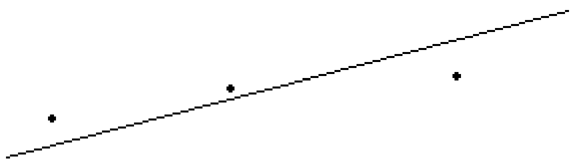


Så här kan vi visa en linje som kan delas, i två lika delar, tudelas.

Har vi nu bevisat att vi kan dela en linje i två lika delar med hjälp av en linjal. Nej! Detta vore enligt Wittgenstein att göra matematiken transcendent. Påståendet är inte matematiskt utan ett påstående utifrån sinneserfarenheter. Det enda man utifrån euklidisk geometri kan säga är ”denna längd = denna längd”.

Låt oss först se på ett axiom: ”Mellan två punkter kan en rak linje dras.” Nej, det håller inte! Till exempel inte mellan månen och Sirius. Vad menar man då med ”kan”? Ordet kan får alltid sin speciella betydelse i ett visst sammanhang.

Vad innebär det att vi kan dra en rak linje genom tre punkter?



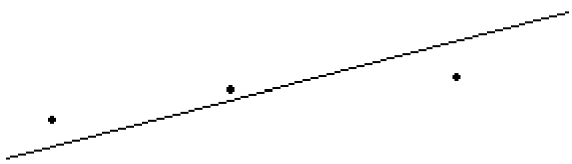
Kan vi förklara vad vi menar med kan genom exempel?

En linje genom en punkt.

En linje genom två punkter.

En linje genom tre punkter.

Och:



En linje genom tre punkter.

Nej, detta är inte analogt med de övriga. Vi använder ordet ”genom” på ett nytt sätt, sätten är inte ”lika”, de är inte analoga. Poängen är inte att man protesterar, utan varför man gör det.

Hur lär vi oss ordet analogs innebörd, jo vi tränar oss i dess användning.

Ytterligare ett exempel:

2	4	6	8
12	14	16	18
102			

Fyll i den nedersta raden i kolumnerna på ett analogt sätt.

Ett exempel till: Multiplicera olika tal på ett analogt sätt. Detta ägnar sig skolans matematikundervisning åt. Man lär sig reglerna, man lär sig matematikens sätt att använda ordet analog, man lär sig ett språkspel, matematikens grammatik.

Enligt Wittgenstein lär man sig alltså ords betydelse i matematiken. I andra sammanhang har orden en annan betydelse, men det finns en koppling. Kanske man skulle kunna säga att användningen av ordet analog inom matematiken är analog med ordets användning inom till exempel fysik, kemi och religion. Däremot är ordets betydelse inte identisk inom dessa olika områden.

Lewy: Vad är det för mening med detta, att vi lär oss att detta är analogt med det här, men inte med det där?

Wittgenstein: Jo, för vi lär ut en teknik om hur man skapar olika mönster, till exempel pentagon, heptadecagon… Genom dessa tekniker klassificerar vi ting. Matematiken kanske inte använder sig av ordet analog, men klassificerar olika till exempel geometriska och matematiska tekniker med hjälp av analogier.

Man bevisar genom att gå steg för steg med hjälp av analogi, med hjälp av paradigm. Det är samma sak med alla bevis, man tar steg för steg och för varje steg säger man, detta är analogin här.

Om någon påstår sig ha funnit en serie konstruerbara polygoner, vad har han funnit? Inget! Han har visat vad som går att konstruera, men det är inte matematiska bevis utan innebär att visa något fysiskt.

Genom att ändra användandet av ordet analog kan man säga att en heptadecagon är analog med en pentagon. Ordet analog har som sagt olika betydelser i olika sammanhang som vi lärt oss eller lär oss. Förnyelse av ordets användning (och andra ord) är naturligtvis möjlig, ja vanlig. Man kan knappast säga att man upptäckt en ny användning av ordet analog, man har skapat den och visat den genom användning.

Turing ansåg att det var absurt att påstå att man funnit en ny användning av ordet analog. Han jämförde det med att finna ett vitt lejon.

Wittgenstein såg ingen likhet mellan en ny användning av ordet analog och att finna ett vitt lejon. Ett vitt lejon kan man finna, men inte en analogi i ordets vanliga mening om man inte byter användning av ordet, till exempel mellan en pentagon och en heptadecagon. En ny användning i ett nytt sammanhang måste naturligtvis vara meningsfull, det vill säga användbar. Wittgensteins ståndpunkt hänger nära samman med hans syn på aspekt, man kan vara aspektblind och aspektseende.

Turing höll fast vid att alla vet vad ordet analog betyder och hur det används. Wittgenstein måste ansett Turing aspektblind.

Kort sagt menar Wittgenstein i denna föreläsning att definitioner av ord kan ge ord en ny mening om den nya meningen är användbar. Så är det med ordet analog. Turing vägrade inse att det är fråga om att ge ord en ny betydelse i ett nytt användbart sammanhang.

Föreläsning VII

Återigen frågar Wittgenstein; vad är ett bevis? Är det att formulera ett påstående som visar att påståendet är sant? Nej! Att säga att påståendet p är sant är detsamma som att säga p. Vad menar vi då när vi säger att något är sant? Att det är i enlighet med verkligheten? Nu är ju verkligheten ett komplicerat begrepp, men att uttrycka sig så behöver inte vara meningslöst. Wittgenstein tar exemplet; ”vad är en god fotograf”? Någon som tar foton som liknar den avfotograferade människan? Men vad menar vi med ”liknar”? Det finns ju många olika sätt att likna och att jämföra. Kort sagt: Ibland är det helt klart vad som är i överensstämmelse med verkligheten, men ofta är det väldigt svårt att avgöra. Dessutom är det ju så att då vi hävdar ett påståendes sanning är det inte helt klart vad ”hävda” innebär.

Ett bevis konstruerat som ett påstående härlett från andra påståenden i enlighet med vissa givna regler säger oss inget om påståendets sanningshalt eller ens om påståendet är användbart.

Vad är då ett bevis? Du kanske skulle säga: Vad ett bevis verkligen bevisar är ett påståendes överensstämmelse med påståenden som vi utgår från, primitiva påståenden, självklara påståenden. Det Wittgenstein vill diskutera här är alltså om ett bevis innebär att ett påstående står i överensstämmelse eller är oförenligt med andra påståenden. Vad han vill visa är att liksom ordet analog kan användas på olika sätt så kan orden oförenligt och förenligt även de användas på olika sätt.

Ett påståendes förenlighet eller oförenlighet med tidigare påståenden beror alltså enligt Wittgenstein på hur vi lärt oss att använda orden och att något som ansetts oförenligt med tidigare påståenden kan genom en innovation anses fullt förenligt med dessa påståenden.

Resonemanget är det samma som när det gällde ordet analog. Betydelsen av förenlig och oförenlig har ändrats genom att någon visat att det oförenliga blivit förenligt genom ett nytt sätt att se det hela på varigenom orden förenligt och oförenligt fått en ny innebörd. Man ser de tidigare oförenliga påståendena ur en ny aspekt. Ordens betydelse lär vi oss genom olika regler, men ”regler, grammatik och språkspel liksom livsform” kan förändras genom innovationer. Aspektblindhet hindrar dock ofta människor från att se att ord kan få andra betydelser i ett nytt sammanhang.

Föreläsning VIII

Som vanligt börjar Wittgenstein sin föreläsning med mängder av exempel på hur ord används i vardagsspråket för att sedan hålla fram konsekvenserna för matematiken. Sedan kommer han till poängen även om han själv säkert skulle förneka att han har någon poäng med utläggningen. Syftet är ändå vanligen att han vill upplösa vår föreställning att orden beskriver objekt, de hör istället hemma i en praxis, i regler, som vi lärt oss. Matematiken sysslar alltså med regler som vi lärt oss att ordna världen på. Liksom alla andra språk som gester, mimik, talat vardagsspråk… Hur som helst slutar föreläsningen på följande sätt som kanske kan sammanfatta hela föreläsningen.

Om man ritar en pentagon på tavlan och sedan säger åt någon: ”Detta är en konstruktion för 5, gör detsamma på ett analogt sätt för 17”. Om vederbörande lärt sig serien av konstruktioner för regelbundna polygoner så skulle uppmaningen referera till en speciell teknik som han lärt sig. Om han inte lärt sig tekniken kanske han skulle uppfinna en teknik. Han skulle kunna fullgöra uppgiften på en rad olika sätt, på en rad analoga sätt. Eller också skulle han säga att det inte går på ett analogt sätt.

Detta leder till att det han gör bara beror på vilken betydelse man lägger i ordet analog. Hur fastställer man då ordet analogs betydelse?

1. Genom att ge några exempel?
2. Tala om vad analog betyder i just detta fall.

”Poängen” är att det kan finnas många olika analoga sätt att utföra uppgiften på och inget äger företräde framför något annat om inte något av sätten kan anses särskilt användbart av något skäl.

Wittgenstein under 1920-talet

Här kan det vara på sin plats med lite biografiska uppgifter. Under första världskriget stred Wittgenstein i den österrikisk-ungerska armén på östfronten och vid krigsslutet på den italienska fronten. Trots att under lång tid låg vid själva fronten författade han samtidigt boken ”Tractatus Logico Philosophicus” som publicerades 1922. Därmed ansåg Wittgenstein att han gjort sitt inom filosofin och att han löst alla filosofins problem.

Vad skulle han göra nu då? Han hade ju givet bort hela sin enorma förmögenhet. Jo, han utbildade sig till lärare och fick anställning i den österrikiska folkskolan i små avlägsna enkla landsortsbyar. Hans undervisningsmetoder var enligt många vittnesbörd originella. De som undervisningen passade kom oerhört långt i sina studier, till exempel inom matematik. Betydligt längre än vad som var motiverat med tanke på årskurs. För andra blev lektionerna en plåga, särskilt för flickor. Aga tillämpade Wittgenstein i stor utsträckning, troligen större än de flesta lärare. Han förblev lärare under åren 1920 – 1926. 1926 slutade han tvärt efter att han slagit en elev sanslös.

Varför då detta avbrott i föreläsningsserien. Jo, det är min övertygelse att de relativt elementära exempel som föreläsningarna är fulla av är hämtade från hans tid som lärare. Eleverna han hade där var ju oskrivna blad inom matematiken . Just sådana personer utgår exemplen från i föreläsningarna. Sådana som inte kunde reglerna utan själva fick inse vad som var möjligt och inte möjligt utifrån olika förutsättningar. Wittgensteins överordnade i det österrikiska skolväsendet uppmuntrade honom i hans pedagogik. Han själv hade goda matematiska kunskaper genom studier i Linz, Berlin och Manchester innan han kom till Cambridge och logiken.

Man kan fråga sig om han tog arbetet som lärare för att förstå hur vi lär oss matematik eller om han enbart i efterhand utnyttjade sina erfarenheter. Det är uppenbart att de allra flesta exemplen i föreläsningarna utgår från personer som ännu inte lärt sig det matematiska regelverket på konventionellt sätt. Därmed kan man säga att Wittgenstein söker just det föreläsningarna handlar om; ”The Foundations av Mathematics”. Inte historiskt som man skulle kunna tänka sig utan snarare psykologiskt. Det är alltså ingen tillfällighet att Wittgenstein i slutet av sitt liv sysslar med filosofisk psykologi och matematik. För honom är det samma sak och båda ämnena har enligt Wittgenstein hamnat i metafysiska villfarelser. Det finns inget inre medvetande att utforska för psykologerna och det finns ingen yttre kosmisk matematisk ordning att upptäcka.

Föreläsning IX

Om någon säger att Smith ritat en pentagon på tavlan är det inget konstigt med det. Om någon säger att han ritat en heptagon på tavlan så skulle man säga att det med säkerhet är ett falskt påstående. Wittgenstein vill i denna föreläsning visa hur denna sorts omöjlighet bevisas.

Om man visar hur en octagon konstrueras och sedan säger att man på samma sätt kan konstruera en polygon med 16 sidor. Sedan ber man någon konstruera en 100-gon. Vederbörande börjar arbeta med linjal och gradskiva, men lyckas inte. Beviset för den som försökte konstruera en 100-gon kan se ut så här. Man visar hur octagon, 16-gon, 32-gon, 64-gon och en 128-gon konstrueras. 100-gonen är överhoppad! Efter detta ger den stackars försökseleven upp. För honom var det ett experiment.

Turing: Är inte en av avsikterna med detta att ge mig en klarare idé om det som sker om man konstruerar polygoner på detta sätt?

Wittgenstein: Yes, but what is reffered to as the sort of thing which would happen? For instance, he is not taught that when he tries to construct polygons in this way there is not an exploration. The proof gives him a very much clearer idea of what he is trying to do.

Försökspersonen har fått en ny idé, bild av, hur man konstruerar polygoner. Beviset för att hans sätt att se på uppgiften har förändrats. Serien av polygonkonstruktioner får honom att inse att det inte finns mer att söka efter. Efter att fått se en ny bild av problemet inser man att det är olösligt.

Föreläsning X

Denna föreläsning är i stor utsträckning en dialog mellan Turing och Wittgenstein huruvida man kan göra matematiska experiment eller snarare vad man menar med matematiska experiment.

Ett barn som multiplicerar 25 x 25 och får 625, utför han ett experiment? På ett sätt gör han det, på ett annat inte.

Turing: Är det inte mer likt ett experiment när man är bekant med multiplikationers regler?

Wittgenstein menar snarare att sammanhanget avgör om det är tal om ett experiment eller inte. Ordet experiment är alltså inte entydigt enligt Wittgenstein. Det beror på. Vilket sammanhang skulle göra multiplikation till ett experiment?

Turing: Om man säger: Låt oss se vad 136 x 51 är?

Wittgenstein menar att man först måste reda ut vad experimentet avser. Gäller det att se om jag klarar av att multiplicera 136 x 51 korrekt, ja då kan man kalla det ett experiment. Frågan är dock om en kalkyl med nödvändighet kan kallas ett experiment. Experiment ger ju ett resultat, liksom en kalkyl. Är alltså en kalkyl ett experiment?

Inte nödvändigtvis. Om syftet är att se om jag klarar räkneuppgiften, då är det ett experiment. Om syftet är att få fram 6936, då är det inte ett experiment.

Turing menar att ett experiment innebär att man vill se vad som sker i slutet av experimentet som är själva uträkningen, medan Wittgenstein menar att det beror på vad man vill se om man kan kalla det ett experiment. Sammanhanget avgör alltså om något är ett experiment. Föreläsningarna visar successivt att Wittgenstein menar att själva kalkylerandet aldrig kan betraktas som experiment, det vill säga att matematiken som sådan aldrig rymmer experiment.

Turing vill jämföra matematikiska experiment med fysikens. Han säger mitt i dialogen: ”Jag ser din poäng”.

Wittgenstein blir upprörd och säger: ”Jag har ingen poäng!” Wittgenstein fortsätter och säger att om Turing vill tolka ordet experiment i vidare mening, så gör det då, så får vi se om det jag sagt stämmer eller inte.

Kort sagt; Turing menar att man experimenterar inom matematiken vilket Wittgenstein förnekar. Först när man vet vad syftet med handlingen (praxis!) är kan man avgöra om det är frågan om ett experiment.

Föreläsning XI

Wittgenstein säger att Turing verkar anse att han och Wittgenstein använder ordet experiment på två skilda sätt. I denna föreläsning vill Wittgenstein visa att så inte är fallet. Han menar att om han lyckas uttrycka sig tillräckligt klart i denna föreläsning skulle Turing inte längre hävda att man gör experiment inom matematiken. Om det är frågan om missförstånd så är det enligt Wittgenstein märkligt att missförståndet är så svårt att undanröja. Wittgenstein tror att det till en del beror på att de genomgått radikalt olika utbildningar.

En av de största svårigheterna är att Turing tror att de har olika åsikter, men enligt Wittgenstein är det inte det saken gäller. Istället är det en särskild sorts undersökning som krävs för att undanröja missförståndet.

Om man ägnar sig åt multiplikationer med oerhört höga tal så verkar det som om experiment och kalkylering närmar sig varandra eftersom resultaten blir osäkra (detta sades lång före digitaliseringen).

Wittgenstein tar upp två typer av missförstånd:

1. Turing sade att det som utmärker ett experiment är att vi är intresserade av resultatet.
2. Om något anses vara en kalkyl så är det inte ett experiment.

Turing: The difficulty is that there is not a finite number of multiplications. You can only put a finite number of multiplcations in your archives (med arkiv menas här ungefär det som hör till matematikens regler och resultat), and when I do a multiplication which is not in your archives, what then?

Wittgenstein: This is like caunting to a number which has not been caunted to.

Wittgensteins tal om arkiv avser att man helt enkelt slår fast olika matematiska regler undan för undan. Sedan är det vad som gäller för alla. Man fastslår regler och regler för reglerna… Precis som i alla andra språk. Matematiker kommer överens om vad de gör, detta är matematikens regler. En matematisk sanning står alltså inte fast för att alla är överens om att detta är sanning, som om alla är vittnen till, vittnar om sanningen. Istället är det så att något blir regel när alla är överens om vad de gör. Det blir standard när det anses vara det naturliga sättet att göra något på.

En student förelår att det matematiska språket utvecklas på samma sätt som till exempel vardagsspråket. Wittgenstein tar dock inte upp den tråden utan klipper av den ganska bryskt.

Om några matematiker genomför en helt ny räkneoperation och några får ett resultat och andra ett annat. Varför?

Turing: (Säkert med ett leende på läpparna) De har använt två olika innebörder av ordet ”analogi”.

Wittgenstein anser naturligtvis att det inte löser problemet. Det innebär bara att föra in ytterligare två symboler (analogier) som kan användas på olika sätt.

Turing föreslår att de borde komma överens om vad man kan göra!

Wittgenstein utropar: Du vill ha ett beslut!

Turing: Ordet experiment borde nog bara användas där alla är överens.

Wittgenstein: Skulle experimentet då visa vilken regel som gäller?

Wittgenstein ser ut att mena att regler fastställs genom att man når samförstånd om hur man gör, inte genom experiment.

En student (Watson) säger att orsaken till att man anser att det finns något rätt och fel i matematiken är väl att man gjort misstag i matematiska tabeller som sedan använt tabellerna vid till exempel brobyggen och så har broar rasat.

Wittgenstein: Tabellerna OCH en speciell vetenskaplig teori ledde till brorasen. Watson har en poäng! Hittar vi tabellmisstag säger vi inte ”nu gör vi den på ett annat sätt” utan vi säger ”de gjorde fel”.

En diskussion om broras dyker upp i senare föreläsningar och då blir Wittgenstein och Turing direkt osams.

Föreläsning XII

Denna föreläsning tar upp skillnaden mellan matematiska och ickematematiska satser (påståenden) som verkar vara analoga. Matematiska satser har ju en likhet med ickematematiska. Wittgenstein menar att skillnaden mellan en erfarenhetssats och en matematisk sats som synes lika är att man till det matematiska påståendet, satsen, alltid kan tillägga ”per definition”.

I denna sammanfattning av Wittgensteins föreläsning växlar jag översättningen av ordet ”proposition” mellan proposition, påstående och sats. Det kanske kan förvirra, men avsikten är i alla fall den motsatta.

Per definition betyder att denna sats slagits fast och ligger i det Wittgenstein kallar ”arkiven”, det vill säga det matematikerna kommit överens om att så här gör vi. Om man inte lägger till ”per definition” leder det enligt Wittgenstein till att man kan fråga sig vad matematik handlar om, en fråga som de flesta matematiker undviker. Erfarenhetssatser och matematiska satser är enligt Wittgenstein helt skilda satstyper, påståenden.

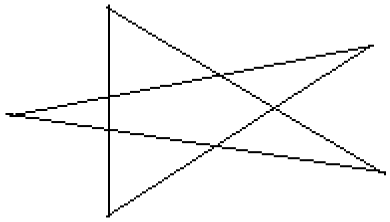
20 + 15 = 35. Handlar den satsen om symboler? Är den en redogörelse, ett påstående, en förklaring? Nej! Man skulle kunna säga att det är ett påstående om tal, men vad är då tal? Tal låter som en slags ny enhet. Kan man göra påståenden om tal? Det låter konstigt tycker Wittgenstein. Liksom man inom logiken kan byta ut satsen ”det regnar” mot ”p” och satsen ”det blåser” mot ”q” skulle man kunna byta ett tal mot ”äpplen”? Till exempel 20 äpplen + 30 äpplen = 50 äpplen. Det kan gälla aritmetik, men lika gärna enbart äpplen helt beroende på i vilka sammanhang satsen <u>används</u>. Det kan vara ett påstående om tal, men lika gärna om äpplen. Det är först när man hänvisar till ”arkiven” (per definition) som man kan slå fast vad det handlar om. Är det skillnad på att räkna äpplen eller göra en matematisk uträkning? Ja, i det ena fallet räknar vi ett antal ting, i det andra antal, bara antal.

Vad innebär det då att räkna? På en fråga från Turing försöker Wittgenstein förtydliga sig. ”Now what I am driving at is the difference between counting the people in this room and counting the points of intersection in the pentagram.”

Vad är skillnaden mellan

| | | | | | | | | | | | | (13 linjer)

och



(10 skärningspunkter)

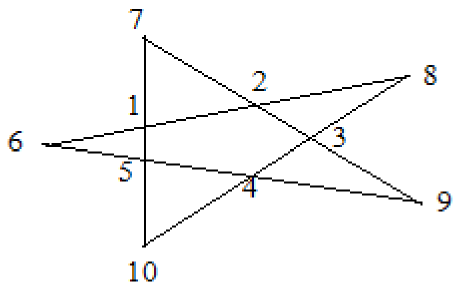
Wittgenstein menar att de tretton linjerna inte är en matematisk sats, medan pentagrammet har ”per definition) tio skärningspunkter och skulle alltså vara en matematisk sats. Vad är det då vi räknar?

Figuren med de tretton linjerna är som sagt inget matematiskt påstående.

Ställer vi upp det annorlunda

| | | | | | | | | | | | |

så skulle detta kunna anses vara ett matematiskt påstående eftersom här avses (4 x 3) + 1 = 13.



Här kan man fråga sig om vi räknat skärningspunkter eller siffror?

I den senare delen av föreläsningen tar Wittgenstein upp frågan som utvecklas i föreläsning XIII, skillnaden mellan tro (försanthålla) något och bevisa något.

Han tar exemplet 1 : 7 = 0.142857142… . Man kan notera att siffrorna återkommer och kan anta att det fortsätter så i evighet. Efter att man fortsatt divisionen kan man då finna det bevisat efter att i början bara trott att de återkommer?

Föreläsning XIII

Jag skall direkt säga att denna föreläsning inte är lätt att följa. Wittgenstein tar åter upp

1 : 7 = 0.142857142

Om man vill visa att serien återkommer så kan man ju visa flera steg. Därmed är det bevisat? När kan man anse att det blivit bevisat, ett bindande påstående för ett barn? Turing menar att matematiska bevis kan vara olika. Rent formella bevis som här när man visar hur serien fortsätter och om eleven är övertygad så är allt väl.

Wittgenstein frågar då: ”Vad är det du övertygat eleven om?” Att folk alltid kommer att fortsätta på detta vis? Måste man över huvud taget säga att eleven övertygats om något? En student, Wisdom: Istället för att säga att han är övertygad kanske man kunde säga att han accepterat det?

Wittgenstein: ”Ja, då blir man av med en absurditet.”

Sedan föreslår Wittgenstein att man kanske kunde införa en matematisk regel som säger att för att vara ett bevis måste resten återkomma tio gånger?

Vad Wittgenstein ville med denna föreläsning blev jag inte helt klar över och inte han själv heller. Den slutar nämligen så här:

”Today I did not at all get to the place I wanted to get to”.

Nej, kanske inte, men frågan om vad ett matematiskt bevis är har han definitivt väckt.

Föreläsning XIV

Wittgenstein börjar med att åter hävda:

1. Att det är skillnad på att räkna inom matematiken och utanför den.
2. Hur matematiska bevis fungerar som han givet exempel på i tidigare föreläsningar.

Dessa två punkter hänger ihop enligt Wittgenstein. Turing har sagt att det vi kallar bevis inom matematiken härleds från formella bevis till bevis som huvudsakligen är avsedda att övertyga. Detta anses ofta som en mycket viktig distinktion.

Wittgenstein anser att i grunden för detta påstående ligger en enorm förvirring eller skall man säga att man blandat ihop helt skilda saker. Innebär det att en del bevis är strikt logiska, andra bara för att övertyga på ett närmast psykologiskt plan? Det finns naturligtvis bevis inom fysik och teknik som grundar sig på experiment, men då är det fysik och inte matematik. När det talas om bevis för att övertyga så måste man säga att det låter väldigt konstigt. Övertyga om vad då?

Vad är då kriteriet för att ett matematiskt påstående, en sats, är sann? Inte en psykologiskt grundad övertygelse! Är det istället ett vattentätt logiskt bevis eller vad?

Är multiplikation bevis? Vad bevisar multiplikation? Jo, den övertygar oss om ett särskilt system och övertygelsen kallas multiplikation. Multiplikationens bevis är multiplikation! Eller bättre uttryckt; multiplikationens bästa bevis är multiplikation som vi vanligen utför den.

Turing: ”När jag använde den frasen menade jag att tränade matematiker har fördomar gentemot vissa former av bevis”.

Wittgenstein kommer snart att återvända till frågan.

Wittgenstein: ”Ni kanske säger. Wittgenstein, vi vet vad du kommer att säga. Ett bevis övertygar oss inte om något, utan intalar oss att anamma en regel.”

Frågan för Wittgenstein är hur det intalar oss. Är det helt enkelt så att vi har särskilda fördomar (positiva) gentemot siffror?

Här tar Wittgenstein upp studenten Wisdoms dispyt som han en gång hade med sin matematiklärare i skolan:

Läraren: 3 x 0 = 0

Wisdom: 3 x 0 = 3

Wisdom: 3 kor multiplicerat med 0 kor är fortfarande 3 kor.

Läraren: 3 x 2 = 3 + 3

3 x 1 = 3

3 x 0 = 0

Wisdom blev överraskad när läraren till sist medgav att 3 x 1 = 3 x 0!

Hur övertygar man någon om att 3 x 0 = 0? Jo, genom att visa att det är det mest användbara sättet eller ännu bättre, de flesta gör så! Är detta bevis? Knappast!

Vad innebär det då att tro på ett matematiskt påstående innan det är bevisat? Vad är kriteriet för att tro på något? Hur får vi ingivelsen, aningen, att detta är nog sant.? När det gäller matematiska påståenden så är främsta anledningen att tro på dem att de är omslutna av ett matematiskt system. 25 x 25 = 625 skulle inte betyda något om det inte vore omslutet av ett sådant system. Wittgenstein verkar dessutom mena att man kan ana framtida matematiska nydaningar enbart om man tror att matematiken kommer att byggas vidare åt ett visst håll. Lite grand på samma sätt som nybyggnation av vägar projekteras och byggs. Att ha en aning om att 1 x 0 = 0 är bara möjligt om man ser det som ett beslut om en regel.

Kan man ”hitta” motsägelser i ett matematiskt system? Enligt Wittgenstein beror det på dig själv. Att anse att man kan hitta bevis i den matematiska världen innebär att man gör en jämförelse med fysikaliska enheter. En matematiker är en person som uppfinner nya sätt att tänka. Det har inget med ”verkligheten” att göra. Att säga något om verkligheten, till exempel om något exotiskt djur, är väsensskilt från att komma med matematiska påståenden. Om man trots det påstår att matematiska satser handlar om matematiska realiteter eller förnekar det får det konsekvenser. Det skapar oklarheter.

Hela föreläsningen har alltså handlat om skillnaden mellan matematiska räkneoperationer och vanlig räkning av ting, liksom skillnaden mellan matematiska påståenden, satser, och erfarenhetspåståenden.

Föreläsning XV

Denna föreläsning synes inledningsvis handla om huruvida matematik är ett spel jämförbart med schack. Det finns likheter mellan dem menar Wittgenstein eftersom båda i grunden är godtyckliga. Det som Wittgenstein egentligen vill klargöra är nog ändå hur svårt vi har att skilja ren matematik från dess applikationer.

Wittgenstein: ”It is particularly difficult to know where to make this cut because certain branches of mathematics have been developed in which the charm consists in the fact that pure mathematics looks as though it were applied mathematics – applied to itself. And so we have the business of a mathematical realm.” Tänk, ett eget matematiskt rike.

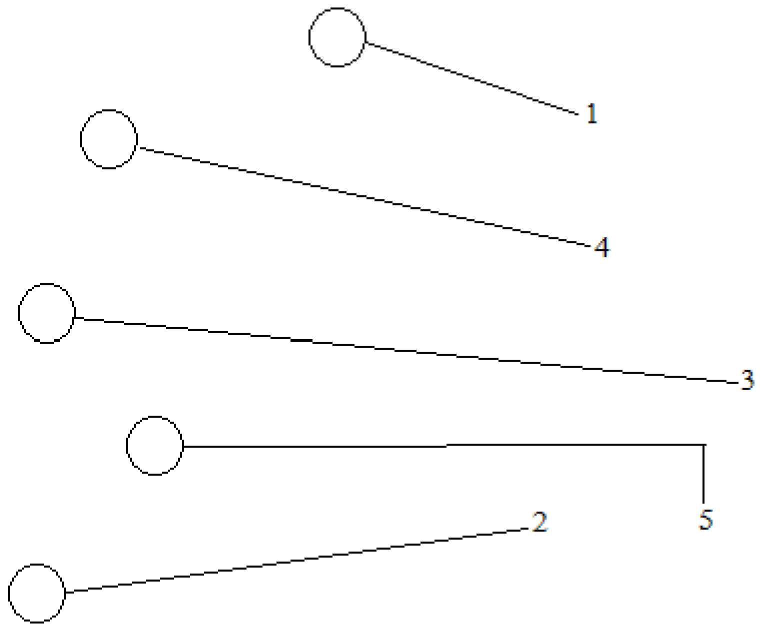
Föreläsning XVI

En andragradsekvation har två rötter. En människa har två ögon. Det är lätt att få uppfattningen att vi räknar för att finna antalet ting. Det verkar lite misstänkt. Att räkna är en metod där vi skapar siffror. Det intressanta är hur metoden appliceras. Ofta räknar vi för att göra förutsägelser av alla möjliga slag, räknar stolarna för att se om alla kan sitta, räknar pengar för att se om de räcker och så vidare. I en sådan räkning skulle vilka ord som helst duga. En ramsa till exempel. Det viktiga om man vill räkna till exempel stolar för att göra en förutsägelse är att då måste tekniken vara klar i förhand.

Hur är det då om man säger ”räkna rötterna”? Antag att vi har en teknik för att lösa andragradsekvationer och fjärdegradsekvationer. Räkna nu dessa ekvationers rötter. Det naturligaste vore att räkna som att andragradsekvationer har två rötter, men man skulle lika gärna kunna börja räkna ett, två…

Efter denna inledning går Wittgenstein över till Bertrand Russells definition av tal. Även Gottlob Frege hade enligt Wittgenstein en liknande definition. Turing menar att med Russells definition är allt logiskt och klart.

Russells definition lyder: ”Ett tal är en klass av klasser lika en given klass”. Lika betyder här att en enhet i en klass motsvarar en annan i en annan klass. Det brukar visas på detta sätt:



Antalet cirklar är den mängd vi kallar fem.

Hur räknar man då kvadratrötter? Wittgenstein kallar detta den värsta form av logisk vidskepelse.

Russel menar å sin sida att en klass har ett antal om dess enheter kan korreleras en – en till en standardklass, till exempel standardjärnmetern i Paris.

Att man kan korrelera är helt klart, till exempel bestämma att det är lika många personer i detta rum som i nästa eller mellan 1,2,3,4,5 och en klass enheter som exemplet ovan, men kastar den ena klassens enheter något ljus över den andra? Är detta enda sättet att korrelera? Wittgenstein påstår att det dessutom finns ett logiskt sätt att korrelera. Var hamnar vi då? Han tar upp det i en senare föreläsning.

Vill man korrelera enligt Russells sätt och har två enorma tal förutsätter det att du redan är inskolad i matematiken. När det är höga tal som korreleras krävs det nämligen en kalkyl som visar att det är frågan om en tautologi. Att det är samma mängd i båda klasserna, att det är samma antal på båda sidorna av är lika med tecknet.

Hur kan Russells kalkyl avgöra hur många rötter en ekvation har. Russell löser det genom att översätta alla engelska ord som används inom matematiken till symboler. Rot definieras alltså, men hur? Jo genom att Russell skapar russellianska, ett nytt språk! I det språket definieras rot så att det blir extremt naturligt att räkna dem på ett sätt.

I tidigare föreläsningar talade Wittgenstein om att 22 kan sägas komma efter 20, inte 21. Men för Russell är det självklart att 21 kommer efter 20. Han förutsätter att vi vet hur man räknar. Att vi vet hur man ordnar talen är en självklarhet i Russells definition av tal.

En till en korrelation är en bild, men den användas på mängder av olika sätt. Om detta talar inte Russel eftersom han är en inskolad matematiker och tar det för en självklarhet i vilken ordning talen står. Dessutom kan man tolka ”korrelera” hur man vill. Det enda man gjort när man korrelerar på just detta sätt är att man uppfunnit ett nytt sätt att se på saken, ett nytt sätt att ordna världen på.

Wittgenstein slutar föreläsningen med orden: ”I wanted to describe today the relation between the actual use of the word counting outside mathematics and its use inside mathematics”.

Åter samma tema som genomsyrar hela föreläsningsserien. Att räkna i vardaglig mening, som enligt min mening har sina rötter i mänsklighetens förhistoriska tid där man till exempel korrelerade dagar mot förråd/dag för att överleva har lyfts ur sitt sammanhang och lever nu sitt eget liv, metafysiska liv, med ständigt nya uppfinningar inom matematiken och algebran där man regelbundet kommer överens om vilken väg man skall gå.

Föreläsning XVII

Frågan är vad man skall kalla en – en korrelation. Efter förra föreläsningen kan man inbilla sig att man känner kriteriet för vad en – en korrelation är. Russell bryr sig inte om den frågan lika lite som Euklides bryr sig om att fixera en mätmetod. Russel verkar tro sig ha visat inte bara att vi kan korrelera två klasser som har samma antal element utan även vilka klasser som helst som har samma antal element är korrelerade på detta sätt. Vid en första anblick verkar det förvånande, men Russel anser sig ha löst det hela genom den så kallade ”identitetsrelationen”. I små mängder kan det kanske vara lättare att definiera en enhets identitet, egenskaper, men inte ens då är det lätt och definitivt inte i större mängder. Att namnge tingen löser heller inget. Frege definierade tal som en egenskaps egenskap! Russell använde sig av symboler, till exempel x. X är en människa eller x är det som har egenskapen att vara stol i rummet.

Vad vi normalt sett anser vara ett tal, menar med ett tal, är inte alltid en egenskap av en egenskap eftersom vi inte vet vad det är som har den egenskapen och om egenskapen namnges med en symbol löser det inte problemet.

Om jag förstått föreläsningen någorlunda rätt så handlar den om atomismens återvändsgränd. Det finns inga atomära enheter, definierbara ting. Wittgenstein brottades med den frågan redan i Tractatus

Logico Philosophicus och gav aldrig något exempel på en atomär sats. 1939 hade han insett att det inte finns absolut definierbara entydiga ting som dessutom kan ges egenskapen tal. Det hjälper inte att namnge tingen med en symbol, till exempel x eller p som Russell försöker sig på.

Vi kan ta begreppet människa som exempel. Vi föreställer oss gärna att en människa är ett entydigt begrepp eftersom hon har bestämda egenskaper. Vilka egenskaper skall hon då ha för att vara en människa? Skall vi räkna upp dem och definiera dem. Det blir besvärligt. Skall en människa ha ett medvetande för att vara människa. Om det inte går att avläsa någon elektriskt aktivitet i hjärnan med de mätinstrument vi har är det då frågan om en människa. Nej, skulle många säga, andra skulle säga ja. Till de som säger nej kan man genmäla att ett 20 veckors foster har hjärnaktivitet och skulle alltså vara en människa? Russell skulle lösa problemet genom att beteckna människa med en symbol i sin logik och matematik och då kan man börja räkna. Har man då löst frågan hur man korrelerar och vad tal är och hur många människor det finns? Nej!

Föreläsning XVIII

Denna föreläsning handlar om logikens roll inom matematiken eller snarare den relation som anses föreligga mellan logik och matematik. Eftersom logiken inte anses godtycklig han man försökt visa att matematiken vilar på logikens grund. Inte minst Wittgenstein själv sökte matematikens grund i logiken i sin bok Tractatus Logico Philosophicus.

Inom matematiken brukar man säga att denna sats är sann förutsatt att axiomet håller måttet, det vill säga kan anses som självklart. Inom logiken kan man emellertid inte uttrycka sig så eftersom det förutsätter att det bara finns <u>en</u> logik.

Russell l utgick i Priciples of Mathematics att alla logiska satser har formen ”om p så q”. Om p är sann kan inte logiskt bevisas, men om p är sann så q ($p \rightarrow q$). Själva logiken skulle alltså vara sann, men det är bland annat fysikens uppgift att avgöra om p är sann eller vad p står för.

Samtidigt hävdas att logiken inte är en ”erfarenhetsvetenskap”, logiken rör inte våra sinneserfarenheter, inget av våra fem sinnen är involverade i logiken utan logiska satsers sannhet erfars direkt av intellektet. Intellektet blir ett slags sinne inom logiken, i medvetandet, men oberoende av våra vanliga sinnen. Med hjälp av intellektet tittar vi in i en särskild värld och i den världen är logiken sann. Detta kan leda till uttryck som ”jag inser detta direkt”. Det är något konstigt med detta, att anse sig kunna inse en sanning genom att titta in i sitt eget medvetande.

Wittgenstein anser att påståendet att logiken är självklar, bevisar sig själv eftersom den ger ett särskilt intryck, inte håller. Även om någon anser något för självklart är det inte säkert att alla anser det. Att anse en logisk sats sann är snarare en psykologisk företeelse.

Hur skall man då göra för att se på vad sätt logiken är sann. Som vanligt när det gäller Wittgenstein så skall vi se på logikens applikationer, hur logiken används. Han går då tillbaka till de sanningstabeller som han arbetade med i Tractatus, men som han ansåg att det var Frege som introducerade. <u>Då</u> ville han visa logiska satsers självklarhet genom dessa sanningstabeller, till exempel:

p ∧ q (p och q) där s=sann och f=falsk

s s s
s f f
f s f
f f f

Om man istället skriver

p ∧ ¬p (p och icke p)
s f f
f s f
f f f

s s f är en kontradiktion, en självmotsägelse och lagen om kontradiktion skulle alltså vara sann? Kan detta tjäna som bevis för att logiken är sann? Nej svarar Wittgenstein eftersom lagen om kontradiktion snarare är en psykologisk övertygelse än ett logiskt bevis. Om vi säger ”ge mig boken och ge mig inte boken” så vet den som mottar uppmaningen inte vad han skall göra, men i ett annat sammanhang betyder dessa ord något som alla i sammanhanget känner till och där är det inte alls motsägelsefullt. I det senare fallet rymmer alltså uttrycket ingen motsägelse.

Att vanligen utesluta motsägelser i språket hör däremot till vårt normala språkbruk, språkspel eller livsform som Wittgenstein vanligen uttrycker sig. Det har dock inte med logik att göra.

Han går sedan vidare till frågan om dubbel negation. Icke icke p är lika med p skulle Russell sagt. Logiskt uttrycks detta:

¬¬p = p

Men Wittgenstein säger

¬¬ = ¬p

Vem har rätt och vem har fel?

Wittgenstein menar att i en betydelse är ¬¬p = p sann och i en annan ¬¬ = ¬p.

Om negation innebär att vända något helt om, i motsats riktning, vända något 180 grader, hur blir det då?

Om en linjal pekar mot en person. Negera den och den pekar bort, negera igen så pekar den mot personen igen. Det vill säga ¬¬p = p.

Detta löser logiken genom att införa parenteser, alltså ytterligare symboler i bilden:

¬ (¬ p) = p eller (¬¬) p = ¬p

Det första säger att vi skall göra samma sak med p som vi gjort tidigare. Till exempel vända en stol och sedan uppmanas man att göra detsamma igen. Betyder detsamma att stolen kommer tillbaka till sitt ursprungliga läge eller att man placerar den i sitt ursprungliga läge och vänder den igen.

Är detta självklart, går det att inse direkt med intellektet? Nej!

Vi måste alltså själva bestämma hur vi skall använda dubbel negation och det är definitivt inte givet på förhand. Vi kan referera till olika bilder, men ingen bild tvingar oss att få ett särskilt resultat eftersom bilder kan användas på många olika sätt. Parentesen till exempel är ju en bild. Sanningstabellerna då? Även de kan tolkas på många olika sätt.

Wittgenstein fortsätter i följande föreläsning försöken att visa att vi har en felaktig syn på logiken, det vill säga att den skulle vara sann. Om han skulle lyckas med det så blir det lättare att förstå att logiken inte erbjuder matematiken en grund att stå på.

Föreläsning XIX

Vad skulle bli fel om vi inte godtog lagen om kontradiktion eller något annat påstående i Russells logik. I förra föreläsningen tog Wittgenstein upp frågan om dubbel negation. Om någon använder dubbel negation för att mena bekräftelse och andra för att mena negation skulle vi då anse att de använde negation eller dubbel negation med olika betydelser? Under föreläsningen diskuterades huruvida en särskild betydelse av negation gjorde en bestämd användning korrekt eller om den betydelsen bestod i att använda negationen på detta sätt.

Det här är ett problem som ständigt dyker upp i filosofin. Vi använder mena, betyda, på olika sätt.

Ibland avser vi något i vårt medvetande när vi säger något, eller något vi pekar på som vi vill förklara. Ibland avser vi användandet av ordet eller satsen i vårt sammanhang. Generellt kan man säga att ord och satsers betydelse bestäms av hur vi använder dem. Det är meningslöst att påstå att vi använder ord och satser på rätt sätt. Istället är poängen att vi alla använder dem på samma sätt i vår språkgemenskap. Att känna ett ords eller sats betydelse är att använda dem på samma sätt som andra. En slags överenskommelse alltså. Finns det då inte ett naturligt sätt att använda ord och satser, ett självklart sätt? Finns det inga kriterier för rätt användande? Är allt helt godtyckligt?

På dessa frågor svarar Wittgenstein att han inte vet. Däremot vet han och har själv använt pedagogiken så, att barn blir straffade om de inte använder ord, satser, inklusive matematiska satser, på ”rätt” sätt!

Ofta hävdas det att logikens sanningar är bestämda genom åsiktskonsensus. Är det vad Wittgenstein påstod? Nej, säger han, det är inte tal om åsikter. Logikens sanningar är bestämda av konsensus av att göra samma sak, reagera på samma sätt. Vi agerar på samma sätt, gör på samma sätt, räknar på samma sätt, talar på samma sätt.

Folk säger att om negation betyder en sak så innebär dubbel negation bekräftelse av samma sak, men om negation betyder något annat så betyder dubbel negation samma sak som negation. Wittgenstein menar istället att det är hur vi använder negation som är dess betydelse. Som så ofta försöker Wittgenstein se hur barn lär sig till exempel ett språk. Ett barn lär sig att applicera negation lång innan det har hört talas om dubbel negation. Dubbel negation för ett barn betyder naturligtvis förstärkt negation. Vi lär oss senare en annan betydelse som ”man” kommit överens om, men som inte är logiskt eller matematiskt bindande annat än just som överenskommelse.

Wittgenstein återvänder till lagen om motsatser, kontradiktion. Är det en kontradiktion att säga ”jag står här och står inte här”? Är ett sådant påstående ett sätt att narras? Kanske är det ett uttryck för något som man i en gemenskap brukar säga i en viss situation som definitivt inte uppfattas som en motsägelse.

En student, Norman Malcolm säger att $p \wedge \neg p$ uttrycker en kontradiktion och nu föreslår du (Wittgenstein) en användning som inte innebär en kontradiktion.

Turing avvisar denna användning av kontradiktionen p $\wedge$ $\neg$p. Han säger att den mest naturliga reaktionen på uppmaningen p $\wedge$ $\neg$p vore att bli missnöjd med vad man än gjorde.

Wittgenstein säger då att ”naturlig” är inte en matematisk term. Matematiken bestämmer inte vad som är naturligt. Man skulle kunna tillägga att inte heller Russells logik bestämmer vad som är ett naturligt användande av negation, dubbel negation eller kontradiktion.

Inom logiken sysslar man med tautologier, till exempel $\neg$ (p $\wedge$ $\neg$ p), men man skulle lika gärna kunna syssla med kontradiktioner. Skulle man då kunna säga att en kontradiktion är sann eller skulle man komma fram till att ordet sann kan användas i en annan betydelse.

Turing: ”One would certainly say that it was being used in a different way”.

Man hör påståenden om sant och falskt, till exempel att det finns matematiska påståenden som kan bevisas. Wittgenstein anser att man bör undvika sådana ord och istället säga att påståendet är sant om kan man hävda påståendet, satsen och det gör man vanligen med röstläge och gester. Bara för att vi använder symboler blir inget tydligare verkar Wittgenstein mena. En sats som ”han är så snäll så vi ger honom en födelsedagspresent” kan naturligtvis ha en ironisk betydelse. Att skriva satser med symboler, till exempel p $\rightarrow$ q verkar logiskt bindande, men kan ha vilken betydelse som helst.

Wittgenstein slutar denna föreläsning med följande ord: ”All that I wish to do by this is to show that there are all sorts of different ways in which we could do logic and mathematics. And the fact that we read it out and say every time ’It is true that’ makes no difference. What matters is how we later use the things which we read out”.

Föreläsning XX

Wittgenstein återvänder till frågan om kontradiktion. Det verkar som om man föreställer sig kontradiktion som en mekanism. Ofta föreställer man sig all logik som ett mekaniskt verk, som ett urverk som med nödvändighet, helt mekaniskt, följer vissa lagar.

Frege påstod till exempel att om man förnekade vissa logiska lagar skulle hela vårt tänkande komma i oordning. Hela vårt tänkande skulle alltså vara behärskat av logiska lagar, vårt tankesystem skulle vara ett slags mekaniskt verk. Wittgenstein menar istället som vanligt att det istället är vårt användande av orden som ger dem dess betydelse. En negation till exempel. Vilket användande av ett ord karakteriserar ordets negation kan man fråga sig, men det är själva användningen som skapar negationen. Användandet av ordet på ett särskilt sätt innebär negation.

Vi kan uttrycka negation på en rad olika sätt. Wittgenstein tar exemplet att ta en sked socker från barnet och säga nej! Långt senare lär vi oss att $\neg\neg$p är en bekräftelse av p och inte en förstärkt negation.

Nu kan man påstå att om vi inte erkänner de logiska reglerna skulle vi inte kunna använda negation som vi gör. Det håller naturligtvis inte Wittgenstein med om. Han tar exemplet hur vi använder ordet ”alla”. ”Alla i det här rummet är män utom en.” Vi har ett ord för alla, men inte för alla utom en. Det är ett faktum som karakteriserar vår logik. Alla utom en är i logiken en komplex idé, men behöver inte vara det i alla språk som då får en helt annan logik.

Wittgenstein motsätter sig alltså idén om ett inbyggt logiskt maskineri. Det förutsätter att det döljer sig något bestämt bakom symbolerna. Vi använder ju mekanism som en symbol för ett särskilt beteende och det är fel enligt Wittgenstein. Om vi talar om ett logiskt maskineri så använder vi denna idé för förklara saker som händer i tiden. Ett logiskt maskineri förutsätter en logisk nödvändighet som är mer tvingande än andra nödvändigheter. Ja lika tvingande som en vevaxels verkan på ventilerna i en motor med hjälp av ”pushrods” (det svenska ordet känner jag inte, men ordet avser stavarna mellan vevaxeln och ventilerna som gör att kolvarna och ventilerna är synkroniserade). Studenten Wisdom föreslår att vi gör anspråk på att delarna i mekanismen är rigida för att förklara att delarna i en kalkyl är rigida. Wittgenstein menar dock att rigiditet inte alls hör hemma i en kalkyl. Vi utför en kalkyl som om den vore en maskin. Ju rigidare delarna är desto tillförlitligare är kalkylen. Det är i applikationen rigiditeten kommer in, inte i kalkylen.

Frågan är: Vad är kriteriet för delarnas rigiditet? Ett svänghjul kopplat till en kolv är en väldigt rigid mekanism. Logisk rigid mekanism är ett mycket skumt påstående. Var kommer talet om lagisk superrigiditet från? Från mekaniken, från juridiken, från vardagsspråket när vi jämför hårdhetsgraden hos olika ämnen? Sedan gör man superlativ av ordet inom logiken och matematiken. Bakom symbolerna som verkar superrigida döljer sig dock en totalt relativ värld där allt bestäms av ur vilken aspekt vi betraktar något och i vilket sammanhang vi använder orden och satserna.

Föreläsning XXI

Hur övertygas man om en logisk lag? För nog är väl många övertygade om de logiska lagarna? När vi i vanliga fall blir övertygade om något så kan vi säga vad som övertygat oss och vad som skulle krävas för att vi skulle överge övertygelsen. Det verkar inte gälla logiken. Vilka är kriterierna där? Ibland hänvisar man till en primitiv erfarenhet som bekräftar de logiska lagarna. Finns det en sådan direkt intellektuell erfarenhet som bekräftar logiska lagar som till exempel lagen om kontradiktion? Wittgenstein minst sagt tvivlar på det. Vad är det då vi är övertygade om när vi är övertygade om sanningen i en logisk sats.

Vi lär oss allra först ett sätt att använda ord och satser. Sedan är det naturligt att utesluta satser som vi aldrig använder, som till exempel motsägelser. Frege betonade att logiska satser inte var psykologiska påståenden. Logiska satser skulle inte vara beroende av hur vi resonerar, tänker.

Wittgenstein tar inte direkt upp det, men han undrar hur vi skulle reagera om vi mötte folk som inte känner till våra logiska lagar apriori. Idag kan vi vara helt säkra på att vår logik inte förekommer apriori hos åtskilliga folk. Här spökar Kant med sina teorier om apriorikunskaper där kausalitet är en sådan apriorikunskap. Wittgenstein tar uppenbart avstånd från sådana teorier.

Wittgenstein går vidare: Hur vet vi att ett fenomen som vi observerar hos några främmande människor är något som vi brukar kalla språk eller vad vi skulle kalla kalkylera? Språk hos olika folk är väldigt olika. Språk omfattar till exempel munnen, gester, miner, redskap, trummor, flöjter, pinnar… Det är lätt att inse att alla folk inte har vår logik och vi kanske skulle betrakta många folk som galna, åtminstone till en början.

Wittgenstein återvänder till dessa frågor senare i livet när han med kraft vänder sig mot att rationalisera primitiva folks beteenden, förstå dem utifrån vårt västerländska perspektiv. Han tar här bestämt avstånd från religionshistorikern James George Frazers försök att intellektuellt förstå primitiva folks riter.

Alla språk har ett syfte säger Wittgenstein (senare i livet skulle han tvivla på det), men språket och användandet av det behöver för den skull inte vara logiskt i vår mening.

Hur övertygas vi då om lagen om kontradiktion? Ja, vi säger åt någon ”sitt och sitt inte”. Uppmaningen fungerar inte, alltså gäller lagen? Inget händer eftersom vi lärt oss en teknik, språkets teknik och denna uppmaning går inte att följa i vårt språkspel. Wittgenstein menar att uppmaningen kan vara fullt användbar i ett annat sammanhang, i ett annat språkspel. Det har inte med logik att göra i den meningen att alla skulle uppfatta uppmaningen som obegriplig direkt och självklart obegriplig.

Turing: Det som förvirrar oss här är att vi vanligen använder kontradiktion som ett kriterium för att vi gjort något fel. Men här kan man inte se att något fel begåtts.

Witttgenstein: Ja – och än mer, inget har gjorts fel.

Förvirringen skulle alltså uppstå när det gäller kontradiktion på grund av att något är fel, men här finns inget fel. Skulle Russells logik bli obegriplig av en motsägelse, kontradiktion?

Studenten Rhees: Om det inte är fel med en motsägelse i logiken har man nog släppt in en infektion. För hur kan vi veta att vi inte måste tillåta fler motsägelser.

Wittgenstein: ”Varför inte?”

Kanske är man rädd för dolda motsägelser i alla axiom vi använder, inte minst inom matematiken.

Turing är rädd för dolda motsägelser i logik och matematik eftersom matematiken appliceras på olika sätt. En bro kanske rasar samman på grund av en dold kontradiktion i den matematiska beräkningen.

Nu börjar samtalet mellan Turing och Wittgenstein ta fart. Föreläsningen slutar med Wittgensteins ord:

”Ah, now this idea of a bridge falling down if there is a contradiction is of immense importance. But I am too stupid to begin it now, so I will go into it next time.

Det Turing säger i slutet av föreläsningen visar att han inte förstått eller velat förstå något av det Wittgenstein försökt visa under 21 föreläsningar. Wittgenstein inser det och just därför säger han att han är ”too stupid” att börja med det nu. Wittgenstein måste vid detta tillfälle ansett att Turing med Wittgensteins terminologi var totalt aspektblind och att han själv var en idiot som trott att han och Turing fört en dialog, ett meningsutbyte, under föreläsningarnas gång. Istället får han börja om från början från föreläsning XXII.

Föreläsning XXII

Wittgenstein börjar föreläsningen med att återknyta till föreläsning XXI där Turing sade att faran med en kontradiktion i logiken eller matematiken ligger i applikationen. En bro skulle till exempel kunna kollapsa på grund av en kontradiktion.

Det tror nu inte Wittgenstein. Han kan tänka sig två anledningar till att en bro kollapsar.

1. Vi har inte full kunskap om naturlagarna. Problemet är alltså fysik, inte matematik.
2. Vi har gjort misstag i kalkylen – en felaktig multiplikation till exempel.

Turing står fast. Om vi har ett kalkylsystem som skapats för brobyggnationer och en bro kollapsar. I efterhand hittar man en kontradiktion i kalkylen. Det är orsaken till brons kollaps enligt Turing.

Att vi undviker kontradiktioner i vardagslag om vi inte vill skapa förvirring är en sak. Det är en helt annan sak att säga att vi bör undvika kontradiktioner i logik menar Wittgenstein. Han återvänder sedan till tanken om vi hade en annan logik. Skulle något gå fel då med om vi använde oss av kontradiktioner? Att inte använda oss av kontradiktioner är bara en säregen teknik vi har.

Studenten Prince: Antag att vi har två sätt att multiplicera som leder till olika resultat. Det är bara det att vi inte märker det.

Turing: Prince´s exempel visar att något kan gå fel om vi inte upptäckt kontradiktionen.

Wittgenstein: Se kontradiktionen, menar ni att se att två sätt att multiplicera leder till olika resultat?

Turing: Ja!

Wittgenstein: Felet med exemplet är att det inte är en kontradiktion. Om man multiplicerar på olika sätt så är det ena eller det andra inte multiplikation, man kan kalla det vad man vill.

Turing: Man kan inte lita på en kalkyl förrän man vet att det inte finns en dold kontradiktion i den.

Wittgenstein vidhåller att broras beror på fysikaliska misstag.

De båda kommer tydligen ingen vart med varandra.

Wittgenstein ställer frågan: Innebär en kontradiktion i matematik och logik att man med nödvändighet hamnar i svårigheter?

Turing: Du verkar mena att om man använder lite sunt förnuft så kommer man inte att komma i svårigheter.

Wittgenstein: Nej, det är **INTE** vad jag menar. Svårigheter är något du hamnar i om du applicerar kalkylen på ett sätt som leder till att något kollapsar. Det kan hända med vilken kalkyl som helst, vare sig den rymmer kontradiktioner eller inte. Det är inte frågan om sunt förnuft om man inte inkluderar fysik i sunt förnuft.

Wittgenstein tar åter upp $p \wedge \neg p$. Om man kan dra vilken slutsats som helst av denna sats så är detta det enda problemet med satsen. Så dra då inte någon slutats av en kontradiktion.

Turing: Det är inte nog. For if one made that rule, one could get round it and get any conclusion which one liked without actually going through the contradiction.

Wittgenstein ger upp för dagen.

Wittgenstein: Well, we must continue this discussion next time.

Föreläsning XXIII

I inledningen till denna föreläsning låter Wittgenstein lite uppgiven. Han tror att vi snart är inne i samma ”mess” som förra gången och så blev det. Wittgenstein försöker gång på gång visa i vad mån

1. logik är aritmetikens grund
2. vi kan tala om logikens sanning.

Allt för att finna i vad mån vi kan säga att logiken apriori är klippan på vilket allt annat vilar. Han återvänder hela tiden till följande: ”It isn´t we are convinced of a particular truth. But rather that we want to do so-and-so.”

Nästa föreläsning vill han tala om logikens lagar ”whether we should say we cannot think except according to them, that is, whether they are psychological laws (vad det nu är) – or as Frege thought, laws of nature. He compared them with laws of natural science (physics) which we must obey in order to think correctly. I want to say they are neither”.

Föreläsning XXIV

Lagen om kontradiktion är en fortsättning på den teknik vi använde när vi gör påståenden. Logikens lagar är ett sätt att åskådliggöra reglerna i vårt språk som i sin tur är uttryck för vårt sätt att leva, att tänka, vår föreställningsvärld. Denna vår föreställningsvärld skulle naturligtvis kunna vara annorlunda vilket mötet med andra kulturer visat och då blir logiken annorlunda och matematiken. Logikens lagar visar alltså hur vi gör eftersom språket återger praxis, inte objekt.

Wittgenstein erinrar sig att Turing tidigare sagt: Matematiska bevis har två funktioner:

1. Övertyga någon.
2. Bevisa sanningen, göra sanningen otvivelaktig.

Det här är förvirrande. Istället är det enligt Wittgenstein så att om vi använder språket annorlunda (språket som alltså grundas på praxis) så blir logiken och matematiken annorlunda.

Intuitionismen påstår att man skapar nya regler för varje ”steg” i matematiken. Vi skulle vägledas av en inre intuition i varje steg i kalkylen, vid varje applikation av regler. Vi skulle lika gärna kunna säga att vi behövde ett nytt beslut vid varje steg. Wittgenstein tror inte att det behövs vare sig intuition eller beslut, man gör helt enkelt bara något. Det är bara frågan om en särskild praxis som de flesta anammat. Intuition är struntprat säger Wittgenstein rent ut.

Om man säger att det finns bevis som övertygar folk och bevis som är obestridliga så är något fel. Bevis som framläggs genom obestridliga, odiskutabla steg, vad är det? Är obestridliga steg övertygande steg?

Russell säger rent ut: Det är inte självklart vad som måste vägleda oss i valet av primitiva propositioner. Tvärtom, man vägleds ibland av resultaten som ett givet val skapar. Många primitiva propositioner anses sanna på grund av vad som följer av dem. Kanske man väljer dem eftersom man vill ta sig till en särskild punkt. Inte på grund av att de är obestridliga.

Är det så att vi skapar obestridliga satser, påståenden, för att vi de leder oss dit vi vill eller dit någon eller några vill föra oss? Logiken och matematiken skulle alltså ha ett bakomliggande syfte och därför måste deras grund vara obestridlig, de måste vila på obestridliga fundament som Wittgenstein menar inte finns.

Jag skulle säga att kulturmöten visar att Wittgenstein har rätt, men att idag håller västerlandets logik och matematik på att erövra alla andra kulturer.

Föreläsning XXV

Återigen tar Wittgenstein upp ämnet om två sorters bevis:

1. Bevis som har till uppgift att övertyga.
2. Bevis som utgör grunden för obestridliga satser.

Denna idé har lett till en fullkomligt felaktig uppfattning om vilken roll matematiska och logiska satser spelar. Många verkar ha föreställningen ”to mathematical propositions there corresponds – in some sense, however sophisticated – a reality”.

Bokstavligt fattat anser Wittgenstein att detta inte betyder något över huvud taget. Vilken verklighet? Uppenbart är det många som jämför matematik och fysik och att båda rör ”verkligheten”. Återigen argumenterar Wittgenstein för att orden i vårt språk används på en rad olika sätt, många helt vardagliga sätt och de förstås vanligen omedelbart, men så småningom får de en allt mer och mer avlägsen användning. Att jämföra påståenden inom fysiken med påståenden inom matematiken leder oss helt vilse enligt Wittgenstein. Jämförelsen är extremt vilseledande. Inom matematiken kan axiom och regler alltid användas på en rad olika sätt. Ingen sats följer med nödvändighet ett axiom. Är det vad Wittgenstein påstår? Jag tror det.

Studenten von Wright: ”We oughtn´t to say that; the kind of thing we get in mathematics is what we call necessity”.

Wittgenstein hävdar som svar att vi måste skilja på nödvändighet inom systemet och nödvändighet som gäller hela systemet. Det finns inga axiom, självklara odiskutabla satser, som kan ligga till grund för hela logiken och hela matematiken.

Wittgenstein går vidare; att det till matematiska satser finns en motsvarighet i verkligheten är ett påstående helt utan mening.

Inom matematiken finns det naturligtvis nödvändigheter. Att multiplicera 21 x 14 leder med nödvändighet till att du får resultatet 294 om det nu betyder något över huvud taget och resultatet står naturligtvis i motsats till att det inte finns någon nödvändighet i systemet.

Återigen vänder sig Wittgenstein mot att man kan rättfärdiga matematiska kalkyler med hjälp av Russells logik. Matematiken grundar sig istället på vardaglig räkning, framsprungen ur en – en korrelation, som avlägsnat sig från räkning i vardagen och börjat leva sitt eget liv vars regler man successivt kommit överens om.

Föreläsning XXVI

Om man talar om en verklighet som motsvaras av matematiska satser och undersöker vad detta kan betyda kan man urskilja två helt skilda betydelser av ”motsvaras”:

1. Om vi avser ett erfarenhetspåstående kan vi säga att verkligheten har en motsvarighet i påståendet.
2. Om verkligheten motsvaras av ett ord måste det ingå i ett sammanhang annars kan det betyda nästan vad som helt.

Ett ord måste alltså ingå i ett sammanhang för att ha en motsvarighet i verkligheten. Från denna utgångspunkt går Wittgenstein vidare till matematiken. ”En verklighet motsvaras av ordet ´två´”. Ett sådant påstående betyder inget enligt Wittgenstein. Under föreläsningen håller Wittgenstein fram två fingrar och pekar på dem och säger ”två”, men vilken verklighet motsvaras av ordet ”två”? Samma sak med ord som ”och”, ”eller”… Vilken verklighet motsvaras de av? Vi har i alla fall användning för dem liksom vi har användning för ordet ”två”, men i sig motsvarar de inte något i verkligheten. Först när det appliceras i ett sammanhang får de en motsvarighet i verkligheten. Att säga att en verklighet motsvaras av 2 + 2= 4 är som att säga en verklighet motsvaras av 2. Det är som att säga att en verklighet motsvaras av en regel vilket är samma sak som att säga att det är en användbar regel. 2 + 2 = 4 handlar inte om 2, det är fråga om grammatik.

Turing frågar om det inte bara är en fråga om att utsträcka användandet av ordet ”handlar om”.

Till detta svarar Wittgenstein att det är ett mycket viktigt misstag. Man kan naturligtvis säga att matematiska satser handlar om tal, men då hamnar man i en röra eftersom man inte ser vad 2 handlar om. Det är något helt annat än vad ett påstående om en soffa handlar om.

Handlar $\aleph_0$ om tal? Nej, men vi har skapat regler för hur vi använder $\aleph_0$. Om man vill förstå ett ord eller en symbol måste man alltid säga; ”Du måste känna dess användning”. Ibland får vi en direkt bild av ett ord, till exempel stol, men ofta missuppfattas ord. Wittgenstein tar exemplet ”partikel” inom fysiken som verkligen inte betyder partikel i vardagsspråkets mening.

Nu tar Wittgenstein fram storsläggan. Vissa delar av matematiken tenderar att uppfattas som särskilt djupa. En kalkyl anses ha en skönhet som inte ligger i själva kalkylen utan i betydelsen den har. En fördold betydelse bortom kalkylen? Är det mystik, metafysik?

Turing menar dock att det inom vissa delar av matematiken krävs en annorlunda teknik för att kunna finna vad det hela egentligen handlar om.

Wittgenstein: Where does calculus take its interest from? It may be from an application of it or from the pictures which go with it and which arise from certain analogies which this calculus has to other calculi.

Föreläsning XXVII

Föreläsningen handlar om relationen mellan Russells och Freges logik och aritmetik. Euklidisk geometri talar inte om längder eller hur längder skall jämföras. Däremot erbjuder euklidisk geometri regler för applikationer av orden längd och lika längd, men tar inte upp frågan hur längder mäts eller jämförs.

På samma sätt talar inte aritmetiken om vad tal är utan erbjuder regler för hur talen används. Man kan jämföra olika mängder med hjälp av vilka ramsor som helst; 1,2,3,4… är bara en av alla.

Russsells logik kan användas för att visa att 4378533 + 3451240 = 7829773, men det blir väldigt omständigt och det är stor risk att göra misstag. Man måste ställa upp en omfattande logisk tautologi.

Turing: Betyder inte detta att räkna med hjälp av en logisk tautologi är mer otillförlitligt än vårt vanliga sätt att räkna?

Wittgenstein: Nej, så är det inte. Detta är bara två vitt skilda vägar att gå.

Det är alltså inte så att logik är en vetenskap på vilken matematiken vilar. Om man menar att aritmetiken är baserad på logiken så menar man kanske att vår aritmetik baseras på Russells logik när man i själva verket kan få vilken annan aritmetik som helst. Bara om man använder Russells definitioner får man vår aritmetik. Man får en annan aritmetik om man har andra definitioner av kardinaltal, om – så, och, eller…

Inte ens detta stämmer, säger sedan Wittgenstein. Inte ens vår vanliga aritmetik följer med nödvändighet Russels logik. Vi kan helt enkelt inte säga om vår aritmetik baseras på Russell eller Russell på vår aritmetik.

Turing: Russells definitions show us the point of having these ideas of addition and finite cardinals and so on.

Wittgenstein: Det är just detta jag förnekar.

Det är något konstigt med påståendet at man kan kontrollera logiken med hjälp av ett annat system. Logiken skulle ju vara grunden till allt, tänkandet, språket, matematiken, slutledningar… och om den är grunden till allt så borde allt kontrolleras i relation till logiken, men logiken kan ju kontrolleras gentemot logiken!

Wittgenstein slutar föreläsningen med att erkänna att han känner sig helt förvirrad och han lämnar de andra i samma förvirring.

Föreläsning XXVIII

Jag är inte säker på att denna föreläsning innehåller något nytt. Kanske beror det på att Turing inte verkar medverka från och med denna föreläsning. Wittgenstein tar åter upp förhållandet mellan logik och aritmetik. Det verkar som om logiken är mer fundamental än aritmetiken eftersom logiken tar upp satser med ord som används i vårt vanliga språk, men orden ges en enda entydig betydelse trots att de har många betydelser i vardagsspråket. Alla ord som används inom matematiken dyker också upp utanför matematiken. Matematiken är ett regelverk för hur de skall användas inom matematiken. Det Russell gjorde var att reducera aritmetiska idéer till logiska idéer (som ansåg vara entydiga). Så skulle man kunna säga att aritmetik är logik och logik aritmetik.

Skillnaden enligt Wittgenstein verkar vara att ord som alla, några, och, eller… används på en massa olika sätt i vardagsspråket, men till det tar Russell ingen notis. Genom symbolerna verkar han mena att han nått entydighet trots att det bakom symbolerna döljer sig en mångtydighet.

Russell sökte matematikens grundfundament i logiken. Det går helt enkelt inte menar Wittgenstein. Vad är då detta grundfundament? Enligt Wittgenstein: ”a child has got to the bottom of arithmetic in knowing how to apply numbers, and that´s all there is to it”.

Detta visste vi väl alla. Behövs 31 föreläsningar?

Wittgenstein: Consider arithmetic as a technique which our chlidren learn – perhaps with an abacus. Isn´t that all right? Why hanker after logic?

Föreläsning XXIX

Här tar Wittgenstein upp logiska satser betraktade som lagar för tanken. Vad säger en logisk sats?

$p \wedge p \supset q \supset q$

Om vi läser ut den med vanligt språk skulle det kunna vara så här: Om det regnar och det regnar inbegriper det att jag blir blöt som inbegriper att jag blir blöt. Vad säger satsen? Något om vädret? Säger den något om vårt tänkande? Nej enligt Wittgenstein! Det är istället en lag om hur vi använder meningar, satser, i vårt språk.

Om satsen vore en tautologi skulle man kunna säga att den motsvaras av en lag för tänkandet.

$p \supset p$ är en tautologi, men säger oss inget. $p \rightarrow q$ är inte en tautologi utan ett påstående om något fysiskt samband i vår livsform, vår värld. Tautologier ger ingen ny information om vårt tänkande. Att två stolar i ett rum är lika många som två i det andra kastar inte mycket ljus över vårt sätt att tänka. Är påståenden inte tautologier så måste vi beskriva språkspelet för att se om satserna innehåller någon information eller inte.

Logiska satser som $p \supset p$ är tautologier och ger alltså ingen information. Matematiska satser är på samma sätt tautologier och ger ingen ny information. Logiska och matematiska satser är helt enkelt av ett helt annat slag än till exempel zoologiska satser.

Jag är osäker, men jag tror detta är vad Wittgenstein vill ha sagt i denna föreläsning.

Föreläsningarna XXX och XXXI

Jag kan inte se att dessa två föreläsningar innehåller något nytt. Det är upprepningar av vad som sagts tidigare. Föreläsningarna hölls under tre terminer sedan Wittgenstein blivit professor vid Trinity College i Cambridge efter Moore. Föreläsningarna utgör en del av Wittgenstein attacker mot en närmast idoldyrkan av vetenskapen. Man skall också veta att Turing parallellt med Wittgenstein gav föreläsningar om Foundations och Mathematics. För Turing var logiken matematikens fasta grund. Wittgenstein avskydde att behöva undervisa i Cambridge särskilt sedan världskriget bröt ut 1939. 1941 började han istället delta i Storbritanniens krigsansträngningar genom att arbeta på ett sjukhus i det bombhärjade London.

Några av studenterna

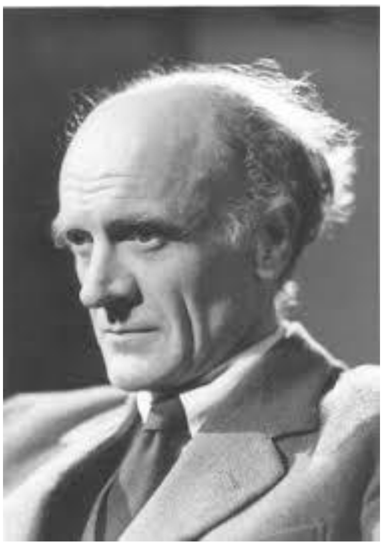
Några av dem som deltog i föreläsningarna, då som studenter.

Norman Malcolm, nära vän till Wittgenstein fram till dennes död 1951. Författare till en biografi över Wittgenstein.

Casimir Lewy

Rush Rhees, en av dem som tog hand om Wittgensteins oerhörda mängd anteckningar och halvfärdiga manuskript vid Wittgensteins död tillsammans med G H von Wright och G E M Anscombe och som tillsammans med dessa publicerade det mesta.

Alastair Watson



John Wisdom

Wittgenstein och G H von Wright. Wittgenstein redan sjuk. Von Wright var finländare och efterträdde Wittgenstein som professor i filosofi i Cambridge.

I min text nämner jag aspektseende och aspektblindhet. Den som ser såväl en hare som en anka i denna bild är alltså aspektseende. Kan man bara se gubben i månen, men inte flickan i månen är man aspektblind.

En sammanfattning av sammanfattningen

Wittgenstein ägnar sig i sina föreläsningar knappast alls åt frågan om matematikens historiska uppkomst. Generellt kan man säga att Wittgenstein läste väldigt lite litteratur inom de områden som han filosofiskt arbetade med. Det gällde språk, logik, matematik, psykologi och religion. När han försökte läsa ett vetenskapligt arbete så blev vanligen resultatet att han snart insåg att författaren hade totalt missuppfattat saken och han avbröt läsandet. Trots det är nog de flesta överens om att Wittgenstein är en av 1900-talets främsta filosofer.

Människan har inte upptäckt Talens språk. Talens språk är skapat av människan liksom alla andra former av språk. Talens språk skapades i forntiden i nödsituationer av ”ekonomiska” skäl, för att kunna planera framtiden när tillgång på föda inte längre var obegränsad. Talens språk hjälpte till så att man kunde veta att maten, veden, vatten… skulle räcka så länge det behövdes, det vill säga tills man kunde förmoda att förråden kunde fyllas på. Mängden tillgångar måste överensstämma med mängden dagar för att man skulle överleva. Mängden tillgångar delades alltså upp i mängden dagar. Det är vad föreläsningarna benämner en – en korrelation. Därifrån är steget inte långt till handel och till att använda Talens språk för att beskriva den värld vi lever i. Det är det Wittgenstein menar när han tar upp det tema som genomsyrar hela föreläsningsserien. Att räkna i vardaglig mening, som alltså enligt min mening har sina rötter i mänsklighetens förhistoriska tid där man till exempel korrelerade dagar mot förråd/dag för att överleva, har lyfts ur sitt sammanhang och lever nu sitt eget liv, metafysiska liv, med ständigt nya uppfinningar inom matematiken och algebran där man regelbundet kommer överens om vilken väg man skall gå

Låt oss kort se på hur talen skrevs i det fornegyptiska språket eftersom det är den forntida kultur jag känner bäst. Det kan kasta något ljus över matematikens ursprung, behovet av att bestämma mängder.

Antal tecknades helt enkelt 𓏺.

𓏺𓏺𓏺 är alltså 3.

Tio 𓏺 tecknades 𓎆.

Hundra 𓏺 tecknas 𓍢

Tusen 𓏺 tecknades 𓆼

Och så vidare.

𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 betyder alltså 866.

𓆼𓆼𓆼𓆼 𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 betyder 4357.

Sedan kan man gå vidare och dela mängden dagar från nymåne till nymåne och noterar

𓇳 𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 , det vill säga 28 dagar. Så är det bara att fortsätta att kartlägga världen.

Med dessa tecken är det lätt att korrelera en – en tecknen med det man vill räkna. Man kan dock naturligtvis välja vilka tecken, vilken ramsa som helst för att göra denna en – en korrelation.

Matematik är alltså på ett sätt avbildande liksom alla andra språk som talspråk, skrift, bild, musik, gester, dans…

Detta matematiska avbildande tal-språket kan som sagt naturligtvis användas för att beskriva ”allt som är fallet” i världen. Men, och detta är poängen, det är ett av människan skapat språk utifrån den ”livsform” människan hamnat i. Det matematiska språket har ingen särställning i språkens värld som man lätt kan tro. Matematiken är ingen upptäckt, utan en mänsklig innovation som vi använt och använder oss av för skapa ordning i världen, skapa oss en bild av världen, en av många. Att påstå att talen finns oss förutan är alltså en form av metafysik.

Vad är det då matematiken avbildar enligt Wittgenstein. Inte världen på något ”objektivt” sätt utan som alla andra språk är matematiken och logiken knuten till just vår gemenskaps praxis, hur vi gör. Det är här Wittgensteins begrepp livsform, språkspel och grammatik hör hemma. Det är därför han hela tiden återvänder till frågan hur orden används (alltså även de matematiska orden som står i visst analogt förhållande till samma ord i vardagsspråket). Användningen ger oss förståelsen av språket och användningen är alltid kopplad till vår praxis, vårt handlande. Därför är språken och logiken (som har sin grund i språket) så olika i olika kulturer eftersom olika kulturers livsform är så skilda åt. Någon allmänmänsklig logik och matematik finns alltså inte, men vi i västerlandet har vår logik och vår matematik, vår ekonomi och vår teknik. Kolonialismen, imperialismen och globaliseringen har snart gjort den global.

För att återknyta till den franska filosofen Simone Weil så är ”Pengar, mekanisering, algebra de tre vidundren i vår tids kultur. Analogin är fullständig.” Jag tror inte Wittgenstein var bekant med Simone Weil även om de vistades samtidigt i London under kriget, men Wittgensteins filosofi är sannerligen inte väsensskild från Simone Weils. Simone Weils bror André Weil var för övrigt en mycket framstående matematiker och beundrades gränslöst av systern.

Aktivitet, handling, praxis är alltså språkens grund och ursprung som jag skrev i inledningen och det behövs inga teorier som förklarar betydelsen för det finns inget att förklara. Språk förstås i det sammanhang de hör hemma i och av alla som delar samma sammanhang, det vill säga samma livsform, grammatik och språkspel. Alla sorters språk (inklusive logiken och matematiken) hämtar dock sina ord från vardagsspråket så det finns en analogi mellan vardagsspråkets användning av ord och betydelsen i det sammanhang orden appliceras i, men inte heller i det nya sammanhanget kan orden definieras utan får sin betydelse i det nya användandet. Bara för att ett ord är ett substantiv betecknar det inte ett bestämt objekt utan är alltid kopplat till en aktivitet. Försök till definitioner leder enbart till att definitionen måste definieras ytterligare och så vidare i alla oändlighet.

Låt oss så se på Wittgensteins föreläsningar i korthet.

Föreläsning 1: Matematiken är en innovation och skall förstås genom att se hur den används.

Föreläsning 2: Användandet av ord, satser, tal, talserier, symboler och så vidare sker alltid i enlighet med en viss ”grammatik”, enligt vissa regler. Applicerandet måste ske inom den gällande grammatikens ramar annars blir applicerandet obegripligt för omgivningen. Reglerna är överenskomna och inlärda. De är skapade av oss människor.

Föreläsning 3: Wittgenstein hävdar att det inte finns någon generell betydelse av ordet bevis. Ordet bevis har olika betydelser beroende på i vilket sammanhang det används. Det är alltså en ”grammatisk” fråga och Wittgenstein synes mena att ordet kan betyda olika saker även inom matematiken.

Föreläsning 4: Alla kalkyler inom matematiken har tillkommit för att tillämpas, appliceras i erfarenhetsvärlden och därefter har de gjorts oberoende av erfarenheten av världen. Kalkylerna har blivit regler för hur vi talar om erfarenheterna och matematiken har börjat leva sitt eget liv som om den vore oberoende av erfarenhetsvärlden.

Föreläsning 5: Wittgenstein menar att vi kan visa hur en regelbunden pentagon ser ut antingen genom att visa en pentagon eller beskriva den som en pentagon med alla sidor och vinklar lika. Dessutom måste man säga att vad beviset visar är att vi kan konstruera en pentagon vars vinklar och sidor är lika eftersom vi mätt dem med gradskiva och linjal. Detta leder enligt Wittgenstein till att påståendet ”vi kan konstruera en pentagon” är ett fysiskt påstående, inte ett matematiskt.

Föreläsning 6: Föreläsningen handlar om användandet av ordet analog i olika sammanhang. Genom att ändra användandet av ordet analog kan man säga att en heptadecagon är analog med en pentagon.

Förnyelse av ordets användning (och andra ord) är naturligtvis möjlig, ja vanlig. Man kan knappast säga att man upptäckt en ny användning av ordet analog, man har skapat den och visat den genom användning.

Föreläsning 7: Vad är ett bevis? Att ett påstående är i enlighet med verkligheten? Nu är ju verkligheten ett komplicerat begrepp, men att uttrycka sig så behöver inte vara meningslöst. Ibland är det helt klart vad som är i överensstämmelse med verkligheten, men ofta är det väldigt svårt att avgöra. Ett bevis konstruerat som ett påstående härlett från andra påståenden i enlighet med vissa givna regler säger oss inget om påståendets sanningshalt eller ens om påståendet är användbart. Vad är då ett bevis? Du kanske skulle säga: Vad ett bevis verkligen bevisar är ett påståendes överensstämmelse med påståenden som vi utgår från, primitiva påståenden, självklara påståenden. Finns sådana självklara påståenden?

Föreläsning 8: Här är Wittgenstein inne på den mest centrala punkten i hans filosofi. Han vill upplösa vår föreställning att orden beskriver objekt, de hör istället hemma i en praxis, i regler, som vi lärt oss. Matematiken sysslar alltså med regler som vi lärt oss att ordna världen på. Liksom alla andra språk som gester, mimik, talat vardagsspråk… Matematiken motsvaras alltså av just vår kulturs livsform.

Föreläsning 9: Här vill Wittgenstein förklara hur omöjligheter lärs ut, hur man får en elev att inse att något är omöjligt inom matematiken såsom vi har skapat den.

Föreläsning 10: Wittgenstein menar att det beror på vad man vill se om man kan kalla något inom matematiken för ett experiment. Sammanhanget avgör alltså om något är ett experiment. Föreläsningarna visar successivt att Wittgenstein menar att själva kalkylerandet aldrig kan betraktas som experiment, det vill säga att matematiken som sådan aldrig rymmer experiment.

Föreläsning 11: Wittgenstein talar om arkiv som avser att man helt enkelt slår fast olika matematiska regler undan för undan. Sedan är det vad som gäller för alla. Man fastslår regler och regler för reglerna… Precis som i alla andra språk. Matematiker kommer överens om vad de gör, detta är matematikens regler. En matematisk sanning står alltså inte fast för att alla är överens om att detta är sanning, som alla är vittnen till, vittnar om sanningen. Istället är det så att något blir regel när alla är överens om vad de gör. Det blir standard när det anses vara det naturliga sättet att göra något på trots att ordet ”naturligt” inte hör hemma i matematiken enligt Wittgenstein

Föreläsning 12: Denna föreläsning tar upp skillnaden mellan matematiska och ickematematiska satser (påståenden) som verkar vara analoga. Matematiska satser har ju en likhet med ickematematiska. Wittgenstein menar att skillnaden mellan en erfarenhetssats och en matematisk sats som synes lika är att man till det matematiska påståendet, satsen, alltid kan tillägga ”per definition”.

Föreläsning 13: Vad Wittgenstein ville med denna föreläsning blev jag inte helt klar över och inte han själv heller. Den slutar nämligen så här: ”Today I did not at all get to the place I wanted to get to”. Föreläsning rör emellertid vad som menas med bevis. Att vi övertygat någon? Om vad? Och/eller om man slagit fast något som ett odiskutabelt faktum. Frågan om vad bevis är helt klart väckt.

Föreläsning 14: Återigen handlar det om bevis. Är det så att en del bevis är strikt logiska, andra bara för att övertyga på ett närmast psykologiskt plan? Det finns naturligtvis bevis inom fysik och teknik som grundar sig på experiment, men då är det fysik och inte matematik. När det talas om bevis för att övertyga så måste man säga att det låter väldigt konstigt. Övertyga om vad då? Vad är då kriteriet för att ett matematiskt påstående, en sats, är sann? Inte en psykologiskt grundad övertygelse! Är det istället ett vattentätt logiskt bevis eller vad?

Föreläsning 15: Denna föreläsning synes inledningsvis handla om huruvida matematik är ett spel jämförbart med schack. Det finns likheter mellan dem menar Wittgenstein eftersom båda i grunden är godtyckliga. Det som Wittgenstein egentligen vill klargöra är nog ändå hur svårt vi har att skilja ren matematik från dess applikationer.

Föreläsning 16: I denna föreläsning gör Wittgenstein upp med Bertrand Russells definition av talen.

Föreläsning 17: Frege definierade tal som en egenskaps egenskap! Russell använde sig av symboler, till exempel x. X är en människa eller x är det som har egenskapen att vara stol i rummet. Vad vi normalt sett anser vara ett tal, menar med ett tal, är inte alltid en egenskap av en egenskap eftersom vi inte vet vad det är som har den egenskapen. Om egenskapen namnges med en symbol löser heller inte problemet. Om jag förstått föreläsningen någorlunda rätt så handlar den om atomismens återvändsgränd. Det finns inga atomära enheter, definierbara ting. Bakom symboler döljer sig vardagsvärlden full av aspekter och ord som bestäms av deras användning.

Föreläsning 18: Denna föreläsning handlar om den relation som anses föreligga mellan logik och matematik. Eftersom logiken inte anses godtycklig har man försökt visa att matematiken vilar på logikens grund. Hur skall man då göra för att se på vad sätt logiken är sann. Som vanligt när det gäller Wittgenstein så skall vi se på logikens applikationer, hur logiken används. Han går då tillbaka till de sanningstabeller som han arbetade med i Tractatus, men som han ansåg att det var Frege som introducerade. Då ville han visa logiska satsers självklarhet genom dessa sanningstabeller. Tanken faller dock på att bakom symbolerna finns inget atomärt definierbart. Dessutom avvisar Wittgenstein i föreläsningen lagen om kontradiktion. Om vi säger ”ge mig boken och ge mig inte boken” så vet den som mottar uppmaningen inte vad han skall göra, men i ett annat sammanhang betyder dessa ord något som alla i sammanhanget känner till och där är det inte alls motsägelsefullt. I det senare fallet rymmer alltså uttrycket ingen motsägelse.

Föreläsning 19: Här tar Wittgenstein upp kontradiktion och vad dubbel negation innebär. Deras användning visar hur de skall förstås. I sig har de ingen bestämd betydelse.

Föreläsning 20: Ofta föreställer man sig logiken som en rigid mekanik. Det ena följer med nödvändighet på det andra. Wittgenstein motsätter sig idén om ett inbyggt logiskt maskineri. Det förutsätter att det döljer sig något bestämt bakom symbolerna. Vi använder ju mekanism som en symbol för ett särskilt beteende och det är fel enligt Wittgenstein.

Föreläsning 21: Wittgenstein undrar hur vi skulle reagera om vi mötte folk som inte känner till våra logiska lagar apriori. Många menar ju att logiken är apriorikunskap utan vilka språket skulle bli obegripligt. Idag kan vi vara helt säkra på att vår logik inte förekommer apriori hos åtskilliga folk. Här spökar Kant med sina teorier om apriorikunskaper där kausalitet är en sådan apriorikunskap. Wittgenstein tar uppenbart avstånd från sådana teorier.

Förelsäning 22: Återigen kommer frågan om kontradiktion upp. Att vi undviker kontradiktioner i vardagslag om vi inte vill skapa förvirring är en sak. Det är en helt annan sak att säga att vi bör undvika kontradiktioner i logik menar Wittgenstein. Han återvänder sedan till tanken om vi hade en annan logik. Skulle något gå fel då med om vi använde oss av kontradiktioner? Att inte använda oss av kontradiktioner är bara en säregen teknik vi har. I andra sammanhang kan en kontradiktion vara fullt användbar. Matematiken har valt att inte använda sig av kontradiktioner, att undvika dem, att se dem som en fara när en kalkyl skall appliceras.

Föreläsning 23: Finns en enda logik? Nej, säger Wittgenstein. Är logiken aritmetikens grund? Nej! Vår livsform är aritmetikens grund.

Föreläsning 24: Intuitionismen påstår att man skapar nya regler för varje ”steg” i matematiken. Vi skulle vägledas av en inre intuition i varje steg i kalkylen, vid varje applikation av regler. Vi skulle lika gärna kunna säga att vi behövde ett nytt beslut vid varje steg. Wittgenstein tror inte att det behövs vare sig intuition eller beslut, man gör helt enkelt bara något. Det är bara frågan om en särskild praxis som de flesta anammat. Intuition är struntprat säger Wittgenstein rent ut.

Sedan återges Russells klarspråk om primitiva propositioner. Russell säger rent ut: Det är inte självklart vad som måste vägleda oss i valet av primitiva propositioner. Tvärtom, man vägleds ibland av resultaten som ett givet val skapar. Många primitiva propositioner anses sanna på grund av vad som följer av dem. Kanske man väljer dem eftersom man vill ta sig till en särskild punkt. Inte på grund av att de är obestridliga. Är det så att vi skapar obestridliga satser, påståenden, för att vi de leder oss dit vi vill eller dit någon eller några vill föra oss? Logiken och matematiken skulle alltså ha ett bakomliggande syfte och därför måste deras grund vara obestridlig, de måste vila på obestridliga fundament som Wittgenstein menar inte finns. Vad Russell säger här är skrämmande. Matematiken är ett maktinstrument .

Föreläsning 25: Många verkar ha föreställningen ”to mathematical propositions there corresponds – in some sense, however sophisticated – a reality”. Vilken verklighet undrar Wittgenstein? Matematiken grundar sig istället på vardaglig räkning, framsprungen ur en – en korrelation, som avlägsnat sig från räkning i vardagen och börjat leva sitt eget liv vars regler man successivt kommit överens om.

Föreläsning 26: Ett ord måste alltså ingå i ett sammanhang för att ha en motsvarighet i verkligheten. Från denna utgångspunkt går Wittgenstein vidare till matematiken. ”En verklighet motsvaras av ordet ´två´”. Ett sådant påstående betyder inget enligt Wittgenstein. Sedan tar Wittgenstein fram storsläggan. Vissa delar av matematiken tenderar att uppfattas som särskilt djupa. En kalkyl anses ha en skönhet som inte ligger i själva kalkylen utan i betydelsen den har. En fördold betydelse bortom kalkylen? Är det mystik, metafysik?

Föreläsning 27: Aritmetiken talar inte om vad tal är utan erbjuder regler för hur talen används. Man kan jämföra olika mängder med hjälp av vilka ramsor som helst; 1,2,3,4… är bara en av alla.

Föreläsning 28: Russell sökte matematikens grundfundament i logiken. Det går helt enkelt inte menar Wittgenstein. Vad är då matematikens grundfundament? Enligt Wittgenstein: ”a child has got to the bottom of arithmetic in knowing how to apply numbers, and that´s all there is to it”.

Föreläsning 29: $p \supset p$ är en tautologi, men säger oss inget. $p \rightarrow q$ är inte en tautologi utan ett påstående om något fysiskt samband i vår livsform, vår värld. Tautologier ger ingen ny information om vårt tänkande. Är påståenden inte tautologier så måste vi känna språkspelet för att se om satserna innehåller någon information eller inte, men någon information om vårt tänkande tillhandahåller de inte. Logiska satser som $p \supset p$ är tautologier och ger alltså ingen information. Matematiska satser är på samma sätt tautologier och ger ingen ny information. Logiska och matematiska satser är helt enkelt av ett helt annat slag än till exempel zoologiska satser.

Föreläsning 30 och 31: Innehåller inget som inte sagts tidigare.

Kanske kan Wittgensteins syn på matematiken sammanfattas med vad han skrev i en anteckning redan 1929:

”Inom ingen religiös konfession har man syndat så mycket genom missbruket av metafysiska uttryck som i matematiken.”